Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Asociativitatea rezultă din $(x\circ y)\circ z = x+y+z+2\sqrt{5} = x\circ(y\circ z)$.

b) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\circ\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\sqrt{5}+\sqrt{5} = 0\in\mathbb{N}$.

c) $x\circ e = e\circ x = x,\ \exists x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e = -\sqrt{5}$.

d) $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1$.

e) $f(x)\circ f(y) = \ln x - \sqrt{5} + \ln y - \sqrt{5} + \sqrt{5} = \ln xy - \sqrt{5} = f(xy)$.

f) $x\circ x' = x'\circ x = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x + x' + \sqrt{5} = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x' = -x - 2\sqrt{5}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ pentru că $x\in\mathbb{N}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Se verifică prin calcul.
b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=(x-3)(y-3)(z-3)+3=x*(y*z)$.
c) Din definiția elementului neutru se obține $(x-3)(e-3)+3=x\Rightarrow e=4$.
d) Se ține cont de punctele precedente, de faptul că legea este peste tot definită ($\forall x, y\neq 3$ rezultă $x*y=(x-3)(y-3)+3\neq 3$) și că orice element $x\in\mathbb{R}-\{3\}$ admite simetricul $x'=3+\frac{1}{x-3}\in\mathbb{R}-\{3\}$.
e) Cum $x_2=5*5=(5-3)^2+3=7$, $x_4=x_2*x_2=(x_2-3)^2+3=19$, atunci $m=x_4*5=(x_4-3)(5-3)+3=35$.
f) Cum $a=(5*5)-3=4$, $b=(5*5*5)-3=8$, $c=(5*5*5*5)-3=16\Rightarrow b^2=ac\Rightarrow a,b,c$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația *2*.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Avem $\sqrt{x^2+(x+1)^2}=x+2$, $x\geq -2$. Prin ridicare la pătrat se obține ecuația $x^2-2x-3=0$, adică $x\in\{-1,3\}$

b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=x*(y*z)$.

c) Pentru $x\geq 0$ obținem $e=0$, dar pentru $x<0$, $x*e=x*0=-x\neq x$. Deci legea nu admite element neutru.

d) Inegalitatea din enunț este echivalentă cu inegalitatea $(x+y)^2\leq 2(x*y)^2$, adică $(x+y)^2\leq 2\left(x^2+y^2\right)$, inegalitate care este echivalentă, după efectuarea calculelor cu $0\leq(x-y)^2$.

e) Cum $a=(1*1)^2=2$, $b=(1*1*1)^2=3$ și $c=(1*1*1*1)^2=4\Rightarrow b-a=c-b=1\Rightarrow$ cerința din enunț.

f) Cum $(1+\sqrt{7})*(1-\sqrt{7})=\sqrt{8+2\sqrt{7}+8-2\sqrt{7}}=4=2^2$, rezultă că afirmația din enunț este adevărată.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}=x*y$.

b) Din $x, y\in G$, rezultă $(x^2-1)>0$, $(y^2-1)>0$, deci $(x^2-1)(y^2-1)>0$ și imediat $x*y=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}>1$.

c) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)^2(z^2-1)+1}=x*(y*z)$.

d) Din definiția elementului neutru se obține $\sqrt{(x^2-1)(e^2-1)+1}=x$ și imediat $e=\sqrt{2}$.

e) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element $x\in G$ admite simetricul $x'=\sqrt{1+\frac{1}{x^2-1}}\in G$.

f) Cum $x*2=\sqrt{3\left(x^2-1\right)+1}=\sqrt{3x^2-2}$, atunci se obține ecuația $\sqrt{3x^2-2}=5$, de unde $x^2=9$. Cum $x\in G$, se obține $x=3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Cum $x = 2^{\log_2 x}$, $\forall x \in G$, obținem $x * y = x^{\log_2 y} = \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 y} = 2^{(\log_2 x)(\log_2 y)}$.

b) Cum $2^2 * 4^2 = 2^{\left(\log_2 2^2\right)\cdot\left(\log_2 4^2\right)} = 2^8$, atunci $a = 2^8 * 2^3 = 2^{24}$. Analog $b = (2^2 \cdot 2^3) * (2^2 \cdot 4^2) = 2^5 * 2^6 = 2^{30}$ și atunci $a < b$.

c) Asociativitatea rezultă din
$(x * y) * z = 2^{(\log_2 (x*y))\cdot(\log_2 z)} = 2^{(\log_2 x)\cdot(\log_2 y)\cdot(\log_2 z)} = 2^{(\log_2 x)\cdot(\log_2 (y*z))} = x * (y * z)$.

d) Din definiția elementului neutru se obține $x * e = x^{\log_2 e} = x$, adică $e = 2$.

e) $8^3 * x' = x' * 8^3 = e = 2$, cu $x' \in G$. Avem $x^{\left(\log_2 8^3\right)\cdot(\log_2 x')} = 2$, deci $2^{9\cdot(\log_2 x')} = 2 \Rightarrow x' = 2^{\frac{1}{9}} \in G$.

f) Se obține $2^{(\log_2 x)^2} = 2$, adică $(\log_2 x)^2 = 1$ și prin urmare $\log_2 x \in \{-1,1\}$. Așadar $x \in \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Se verifică prin calcul.

b) Avem $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} > 0$ și $(x * y) - 1 = -\dfrac{(1-x)(1-y)}{xy + (1-x)(1-y)} < 0$ pentru că $x, y \in (0,1)$.

c) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \dfrac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)} = x * (y * z)$.

d) Legea "$*$" este asociativă. Din definiția elementului neutru se obține $\dfrac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x$, adică

$x(1-x)(2e-1) = 0, \forall x \in (0,1)$ și deci $e = \dfrac{1}{2}$.

e) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element $x \in G$ admite simetricul $x' = 1 - x \in G$.

f) Cum $x * \dfrac{1}{3} = \dfrac{\dfrac{x}{3}}{\dfrac{x}{3} + \dfrac{2(1-x)}{3}} = \dfrac{x}{2-x}$, atunci ecuația devine $\dfrac{x}{2-x} = \dfrac{1}{7}$, de unde $x = \dfrac{1}{4}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}=x*(y*z)$.

b) Folosind definiția elementului neutru se obține $e=0$.

c) Se ține cont de punctele precedente , de faptul că legea este peste tot definită, este comutativă şi că orice element $x\in\mathbb{R}$ admite simetricul $x'=-x\in\mathbb{R}$.

d) Distributivitatea se obține din relațiile: $x\cdot(y*z)=x\cdot\sqrt[3]{y^3+z^3}=\sqrt[3]{x^3y^3+x^3z^3}=(x\cdot y)*(x\cdot z)$.

e) Se cunoaşte că $\left(\mathbb{R}^*,\cdot\right)$ este grup şi ținând cont de punctele precedente rezultă că $(\mathbb{R},*,\cdot)$ este corp.

f) Avem sistemul $\begin{cases}x*y=1\\x+y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y^3=1\\x+y=1\end{cases}$ cu mulțimea soluțiilor $\{(1;0),(0;1)\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Se verifică prin calcul.

b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\frac{1}{4}(x+1)(y+1)(z+1)-1=x*(y*z)$.

c) Din definiția elementului neutru, se obține $e=1$.

d) Dacă $x=2p+1$, $y=2q+1$, $p,q\in\mathbb{Z}$, atunci $x*y=\frac{1}{2}(x+1)(y+1)-1=2(p+1)(q+1)-1\in H$.

e) Pentru $x\in H$, se obține $x'=-1+\frac{4}{x+1}\in H\Rightarrow(x+1)\in\{\pm1,\pm2\pm4\}$ și cum $x,x'\in H$, rezultă $x\in\{-3,1\}$.

f) Cum $x*\frac{1}{x}=\frac{(x+1)^2}{2x}-1$, atunci $x*\frac{1}{x}-1=\frac{(x+1)^2}{2x}-2=\frac{(x-1)^2}{2x}\geq 0$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $(x-2)(y-2)+m-4=xy-2x-2y+m=x*y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) $2009*2009=2007^2+m-4\Rightarrow m=6.$

c) $x*a=a*x=a,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x-2)(a-2)=a-2,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=2$.

d) $3*x=x*3=x,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(x-2)+m-4=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=6.$

e) Pentru $m=6,\ x*2=2*x=2,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{1}*\sqrt{2}*...*\sqrt{2009}=2.$

f) $x,y\in[2,\infty)\Leftrightarrow x-2\geq 0, y-2\geq 0\Rightarrow(x-2)(y-2)+m-4\geq m-4\Rightarrow m=6$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Se verifică prin calcul.
b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=4(x-1)(y-1)(z-1)+1=x*(y*z)$.

c) Din definiția elementului neutru, se obține $e=\frac{3}{2}$.

d) Dacă $x,y\in G$, atunci $(x-1),(y-1)>0$, deci $(x-1)(y-1)>0\Rightarrow x*y=2(x-1)(y-1)+1>1$, adică $x*y\in G$.

e) Se ține cont de punctele precedente și de faptul că din definiția elementelor simetrizabile, pentru orice $x\in G$ se obține $x'=1+\frac{1}{4(x-1)}\in G$.

f) Cum $x*x*x=4(x-1)^3+1=\frac{3}{2}$ atunci se obține $(x-1)^3=\frac{1}{8}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3+2} = x*(y*z)$.

b) Folosind definiția elementului neutru se obține $\sqrt[3]{x^3+e^3+1} = x$, adică $e=-1$.

c) Se ține cont de punctele precedente, de faptul că legea este peste tot definită și că orice element $x \in \mathbb{R}$ admite simetricul $x' = \sqrt[3]{-x^3-2} \in \mathbb{R}$.

d) $E(x) = x*(-x) = \sqrt[3]{x^3+(-x)^3+1} = \sqrt[3]{1} = 1$.

e) Presupunem că $\exists x, y \in \mathbb{R}^*$ cu $\frac{x}{y}*\frac{y}{x}=1$. Atunci $\frac{x}{y}*\frac{y}{x} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3}+1} = 1 \Leftrightarrow x^6+y^6=0$, imposibil pentru că $x, y \in \mathbb{R}^*$.

f) Notând $2^{3x} = t$, se obține $t^2+t-2=0$ cu soluțiile $t \in \{1,-2\}$. Cum $2^{3x} = t > 0$, avem $t=1$ și deci $x=0$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) Cum $x \circ y = (x+2)(y+2)-2$, atunci $(x \circ y) \circ z = (x+2)(y+2)(z+2)-2 = x \circ (y \circ z)$ și prin urmare legea "$\circ$" este asociativă.

b) Folosind definiția elementului neutru și faptul că legea "$\circ$" este comutativă, se obține $xe+2x+2e+2=x$, adică $(x+2)(e+1)=0$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ și deci $e=-1$.

c) Cum $2 \circ (3*1) = (2+2)(3+1+a+2)-2 = 4(6+a)-2 = 4a+22$ și
$(2 \circ 3)*(2 \circ 1) = (2+2)(3+2)-2+(2+2)(1+2)-2+a = a+28$ atunci se obține $a=2$.

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă și comutativă, admite elementul neutru $e'=-a$ și orice element $x \in \mathbb{Q}$ admite simetricul $x'=-2a-x \in \mathbb{Q}$).

e) Cum $x \circ x = (x+2)^2-2$, atunci $x \circ x \circ x = (x+2)^3-2 \Rightarrow m=-2$.

f) Avem $x*x = x \circ x \Leftrightarrow 2x+2=(x+2)^2-2 \Leftrightarrow x(x+2)=0$, de unde $x \in \{-2,0\}$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $2^a * 2^{-a} - 6 = 2^a + 2^{-a} - 2 = \left(2^{\frac{a}{2}} - 2^{-\frac{a}{2}}\right)^2 \geq 0$.

b) Avem $2^x * 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x + 4 = 16$, de unde $2^x = 4$, adică $x = 2$.

c) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = x + y + z + 8 = x * (y * z)$.

d) Din definiția elementului neutru se obține $x + e + 4 = x$ adică $e = -4$.

e) Se ține cont de punctele precedente, de faptul că legea este comutativă, peste tot definită şi că orice element $x \in \mathbb{R}$ admite simetricul $x' = - - \in \mathbb{R}$.

f) Pentru $x > 0$ se notează $\log_2 x = t$ şi se obține ecuația $t + 2t + 4 = 7$ cu soluția $t = 1$ şi atunci $x = 2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) Se verifică prin calcul.
b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=(x-6)(y-6)(z-6)+6=x*(y*z)$.
c) Din definiția elementului neutru se obține $(x-6)(e-6)+6=x$ și $e=7$.
d) Dacă $x,y\in G$, atunci $(x-6),(y-6)\in[-1,1]$, deci $(x-6)(y-6)\in[-1,1]\Rightarrow$
$x*y=(x-6)(y-6)+6\in[5,7]$, deci $x*y\in G$.
e) Din $x*x=7$, rezultă $(x-6)^2=1$ și atunci $M=\{5,7\}$. Rezultă că $(M,*)$ este grup cu elementul neutru $e=7$ și $5'=5$. (eventual se poate alcătui tabla operației)
f) Cum $x*y=(x-6)(y-6)+6$, atunci relația din enunț devine $(x-6)(y-6)=1$. Ținând cont că $x,y\in\mathbb{Z}$ se obțin soluțiile $\begin{cases}x=7\\y=7\end{cases}$ și $\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) Se verifică prin calcul.

b) Din $x, y \in G$, rezultă $(x^2-2)(y^2-2)>0$ și $x*y=\sqrt{(x^2-2)(y^2-2)+2}>\sqrt{2}$

c) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\sqrt{(x^2-2)(y^2-2)(z^2-2)+2}=x*(y*z)$.

d) Din definiția elementului neutru se obține $\sqrt{(x^2-2)(e^2-2)+2}=x$, adică $(x^2-2)(e^2-2)=x^2-2$, $e=\sqrt{3}$.

e) Din definiția elementului simetrizabil, pentru $x=\sqrt{8}\in G$, există $x'\in G$ astfel încât $\sqrt{8}*x'=x'*\sqrt{8}=e=\sqrt{3}$.

Atunci $\sqrt{(8+2)(x^2-2)+2}=\sqrt{3}$ și cum $x'\in G$, $x'=\sqrt{2+\frac{1}{8-2}}=\sqrt{\frac{13}{6}}\in G$.

f) Cum $a=(2*2)^2-2=4$, $b=(2*2*2)^2-2=8$ și $c=(2*2*2*2)^2-2=16$, atunci $b^2=ac$ adică *a,b,c* sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, avem $(x\circ y)\circ z=((x-3)(y-3)+3-3)(z-3)+3=(x-3)(y-3)(z-3)+3$ şi $x\circ(y\circ z)=(x-3)((y-3)(z-3)+3-3)+3=(x-3)(y-3)(z-3)+3$ deci legea "$\circ$" este asociativă.

b) Din definiția elementului neutru se obține $x+a-12=x\Rightarrow a=12$.

c) Cum $x\circ y=(x-3)(y-3)+a-9$ se obține $2\circ(3*1)=(2-3)(3*1-3)+a-9=a-7$. De asemenea $(2\circ 3)*(2\circ 1)=(a-9)*(a-7)=2a-19$ şi atunci $a-7=2a-19$, adică $a=12$.

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă şi comutativă, admite elementul neutru $e=3$ şi orice element $x\in\mathbb{R}$ admite simetricul $x'=6-x\in\mathbb{R}$.

e) Pentru $a=12$, $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, atunci $x\circ x=(x-3)^2+3$ şi $x\circ x\circ x=(x-3)^3+3$, atunci $m=3$.

f) Cum $\begin{cases}x*y=2\\x\circ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-3)+(y-3)=-1\\(x-3)(y-3)=-2\end{cases}$, de unde mulțimea soluțiilor sistemului este $\{(1;4),(4;1)\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z = x+y+z+6 = x*(y*z)$.

b) Din definiția elementului neutru se obține $x+e+3=x$, adică $e=-3$.

c) Se ține cont de punctele precedente, de faptul că legea este peste tot definită și că orice element $x\in\mathbb{R}$ admite simetricul $x'=-x-6\in\mathbb{R}$.

d) Notând $\log_2 x = t$, se obține ecuația $t+\frac{t}{2}-3=0$ cu soluția $t=2$ și $x=4$.

e) Cum $a=2*2*2=12$, $b=a*2=a+2+3=a+5=17$ și $c=b*2=b+5=22$, rezultă că numerele a,b,c sunt termenii consecutivi ai unei progresie aritmetică cu rația $r=5$.

f) Cum $\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$ și $\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=3+2\sqrt{2}$, atunci $m=(3-2\sqrt{2})*(3+2\sqrt{2})=9=3^2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Se verifică prin calcul.

b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z = 9(x+2)(y+2)(z+2)-2 = x*(y*z)$.

c) Se observă că legea este comutativă. Din definiția elementului neutru se obține $3(x+2)(e+2)-2=x$, adică $3(e+2)=1$ și $e=-\frac{5}{3}$.

d) Din definiția elementului simetrizabil, se obține $3(x+2)(x'+2)-2=-\frac{5}{3}$, $x'=-2+\frac{1}{9(x+2)}=-\frac{41}{21}$.

e) Cum $x*x=3(x+2)^2-2$ și $x*x*x=3^2(x+2)^3-2$, se obține $n=2$.

f) Cum $a=(-1)*(-1)+2=3-2+2=3$, $b=(-1)*(-1)*(-1)+2=3^2-2+2=9$ și $c=(-1)*(-1)*(-1)*(-1)+2=3^3-2+2=27$, rezultă că numerele *a,b,c* sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $q=3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $x, y \in (-2,2)$ rezultă că $xy \in (-4,4)$ și deci $xy+4>0$. Cum $(x*y)+2=\dfrac{2(x+2)(y+2)}{4+xy}>0$ și $(x*y)-2=-\dfrac{2(2-x)(2-y)}{4+xy}<0$, rezultă $x*y \in G$.

b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\dfrac{4(x+y+z)+xyz}{4+xy+yz+zx}=x*(y*z)$.

c) Din definiția elementului neutru se obține $\dfrac{4(x+e)}{4+xe}=x$, adică $4e(1-x)=0, \forall x \in (-2,2)$ și deci $e=0$.

d) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element $x \in G$ admite simetricul $x'=-x \in G$.

e) Cum $2(x+2)(y+2)-2(2-x)(2-y)=8(x+y)$ și $2(x+2)(y+2)+2(2-x)(2-y)=2(4+xy)$ atunci $x*y=\dfrac{2(x+2)(y+2)-2(2-x)(2-y)}{(x+2)(y+2)+(2-x)(2-y)}$.

f) Cum $(G,*)$ este grup, atunci orice element este simetrizabil și deci $1'=-1$(punctul **d)**). Compunând la stânga în relația dată cu $1'=-1$, se obține $x=1*1=\dfrac{4(1+1)}{4+1}=\dfrac{8}{5}$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar
Rezolvare

a) Cum $x\circ y=\frac{1}{2}(x-1)(y-1)+1$, atunci $(x\circ y)\circ z=\frac{1}{4}(x-1)(y-1)(z-1)+1=x\circ(y\circ z)$.

b) Folosind definiția elementului neutru şi comutativitatea legii "$\circ$" se obține $x\circ e=\frac{1}{2}(x-1)(e-1)+1=x$, adică $(x-1)(e-3)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi deci $e=3$.

c) Distributivitatea rezultă din

$$(x\circ y)*(x\circ z)=\frac{(x-1)(y-1)}{2}+1+\frac{(x-1)(z-1)}{2}+1-1=\frac{(x-1)(y+z-2)}{2}+1=x\circ(y*z).$$

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă şi comutativă, admite elementul neutru $e=1$ şi orice element $x\in\mathbb{R}$ admite simetricul $x'=2-x\in\mathbb{R}$

e) Cum $a\circ x=\frac{1}{2}(ax-a-x+3)=\frac{a-1}{2}x+\frac{3-a}{2}$ şi $a\circ x=a$, $\forall x\in\mathbb{R}$, atunci $\begin{cases}\frac{a-1}{2}=0\\ \frac{3-a}{2}=a\end{cases}$, adică $a=1$.

f) Cum $3\circ 1=\frac{3-3-1+3}{2}=1$, $x\circ 3\circ 1=x\circ 1=1$ şi $x\circ x=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$, atunci se obține $x=1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Din definiția elementului neutru şi cum legea este comutativă, avem $x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$, adică $(e+2)x+2e+a=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$ de unde $\begin{cases}e+2=1\\2e+a=0\end{cases}$. Deci $a=2$ şi $e=-1$.

b) Cum $x*y=(x+2)(y+2)-2$, asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=(x+2)(y+2)(z+2)-2=x*(y*z)$.

c) Din egalitățile $(x+y+2)*z=(x+y+4)(z+2)-2$ şi $(x*z)+(y*z)+2=(x+2)(z+2)-2+(y+2)(z+2)-2+2=(x+y+4)(z+2)-2$ rezultă că egalitatea din enunț este adevărată.

d) Din $x*x'=-2$ $(x+2)(x'+2)-2=-2$ $(x+2)(x'+2)=1$, rezultă $x'=-2+\frac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}$ pentru $x\in\mathbb{Z}$. Atunci $(x+2)\mid 1$, adică $(x+2)\in\{-1,1\}$. Obținem $x\in\{-3,-1\}$

e) Din $x*y=3$ se obține $(x+2)(y+2)=5$, de unde $(x+2;y+2)\in\{(1;5),(-1;-5),(5,1),(-5;-1)\}$ şi atunci mulțimea soluțiilor ecuației este $\{(-1;3),(-3;-7),(3,-1),(-7;-3)\}$

f) Cum $(-3)*(-3)=a-3=(-1)*(-1)\in\{-3,-1\}$ atunci se obține $a\in\{0,2\}$. De asemenea $(-3)*(-1)=(-1)*(-3)=a-5\in\{-3,-1\}$, adică $a\in\{2,4\}$. Prin urmare $a=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Avem $x * x = \sqrt[3]{2x^3 - 1}$ și ecuația devine $\sqrt[3]{2x^3 - 1} = 1$, de unde $x = 1$.

b) Asociativitatea rezultă din $(x * y) * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 2} = x * (y * z)$.

c) Folosind definiția elementului neutru se obține $\sqrt[3]{x^3 + e^3 - 1} = x$ adică $e = 1$.

d) Din definiția elementului simetrizabil, pentru $x \in \mathbb{R}$, există $x' \in \mathbb{R}$, astfel încât $x * x' = x' * x = e = 1$. Se $x' = \sqrt[3]{2 - x^3} = \sqrt[3]{-8} = -2$.

e) Cum $a = (2 * 2)^3 = 15$, $b = (2 * 2 * 2)^3 = 22$ și $c = (2 * 2 * 2 * 2)^3 = 29$, rezultă că *a,b,*c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice cu rația $r = 7$.

f) Avem $m = \sqrt[3]{32} * \sqrt[3]{33} = \sqrt[3]{32 + 33 - 1} = \sqrt[3]{64}$, adică $m = 4 = 2^2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $2(x+3)(y+3)-3=2xy+6x+6y+15=x*y$

b) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=4(x+3)(y+3)(z+3)-3=x*(y*z)$.

c) Din definiția elementului neutru se obține $2(x+3)(e+3)-3=x$, adică $2(e+3)=1$ și deci $e=-\frac{5}{2}$.

d) Dacă $x,y\in G$, atunci $(x+3),(y+3)\in(0,\infty)$, deci $(x+3)(y+3)\in(0,\infty)$ și $x*y=2(x+3)(y+3)-3\in(-3,\infty)$, deci $x*y\in G$.

e) Se ține cont de punctele precedente și de faptul că din definiția elementelor simetrizabile pentru orice $x\in G$ se obține $x'=-3+\frac{1}{4(x+3)}\in(-3,\infty)$

f) $x*x*x=2^2(x+3)^3-3=2^n(x+3)^3-3$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde $n=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}=\sqrt{x^2y^2-4x^2-4y^2+20}=x*y$

b) Din $x,y\in G$, rezultă $(x^2-4)(y^2-4)>0$ și imediat $x*y=\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}>2$

c) Asociativitatea rezultă din $(x*y)*z=\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)^2(z^2-4)+4}=x*(y*z)$.

d) $\sqrt{(x^2-4)(e^2-4)+4}=x$ și imediat $e=\sqrt{5}$.

e) Rezultă din punctele precedente și din faptul că orice element $x\in G$ admite simetricul $x'=\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2-4}}\in G$.

f) Avem ecuația $\sqrt{(x^2-4)(y^2-4)+4}=8$, de unde $(x^2-4)(y^2-4)=60$. Cum $x,y\in\mathbb{N}-\{0,1,2\}$ se obține $\begin{cases}x^2-4=d\\ y^2-4=\dfrac{60}{d}\end{cases}$, unde $d\mid 60$. Cum $x^2=d+4$, $d\in\{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$ convine doar $d\in\{5,12,60\}$. $x\in\{3,4,8\}$, iar $y\in\{4,3,\sqrt{5}\}$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $\{(3;4),(4;3)\}$

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării

Centrul Național pentru Curriculum şi Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Cum $x \circ y = (x-5)(y-5)+5$, atunci $(x \circ y) \circ z = (x-5)(y-5)(z-5)+5 = x \circ (y \circ z)$.

b) $x \circ e = (x-5)(e-5)+5 = x$, adică $(x-5)(e-6)=0$, deci $e=6$.

c) Cum $x \circ (y * z) = (x-5)(y*z-5)+5 = (x-5)(y+z-10)+5$ şi

$(x \circ y) * (x \circ z) = (x \circ y)+(x \circ z)-5 = (x-5)(y-5)+(x-5)(z-5)+5 = (x-5)(y+z-10)+5$ rezultă că se verifică cerința

d) Se verifică condițiile din definiția grupului (legea este peste tot definită, este asociativă şi comutativă, admite elementul neutru $e=5$ şi orice element $x \in \mathbb{Z}$ admite simetricul $\acute{x} = 10 - x \in \mathbb{Z}$).

e) Se folosesc punctele precedente şi se ține cont că legea ”$\circ$” este peste tot definită.

f) Se obține ecuația $x^2 - 10x + 30 = x^2$, adică $x = 3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*y=xy-\sqrt{2}(x+y)+2+\sqrt{2}=xy-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2+\sqrt{2}=$

$=x\left(y-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) $x*\sqrt{2}=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=\sqrt{2}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ (x*y)*z=x*(y*z)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)\left(z-\sqrt{2}\right)$.

d) Se arată că $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$. Existența elementului e se determină din $x*e=x,\forall x\in\mathbb{R}$ de unde se obține $e=\sqrt{2}+1\in\mathbb{R}$. Se demonstrează că legea "$*$" este comutativă pe $\mathbb{R}$ adică $x*y=y*x,\forall x,y\in\mathbb{R}$. Deci $\exists e=\sqrt{2}+1\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

e) Pentru ca structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ să fie grup este necesar ca orice element al mulțimii $\mathbb{R}$ să fie simetrizabil în raport cu legea "$*$". Deducem că $x'=\frac{1}{x-\sqrt{2}}+\sqrt{2}\in\mathbb{R},\forall x\neq\sqrt{2}$, deci $\sqrt{2}$ nu este simetrizabil în raport cu legea "$*$", de unde rezultă că structura algebrică $(\mathbb{R},*)$ nu este grup.

f) Datorită asociativității legii "$*$", grupând termenii și ținând cont de cerința b), obținem:

$$\left[\underbrace{\left(-\sqrt{3}\right)*\left(-\sqrt{2}\right)*(-1)*0*1*\left(\sqrt{3}\right)}_{\alpha}\right]*\left(\sqrt{2}\right)=\alpha*\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}.$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se verifică prin calcul.

b) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\left(x \circ y\right) \circ z = x \circ \left(y \circ z\right) = \left(x - 2009\right)\left(y - 2009\right)\left(z - 2009\right) + 2009$

c) Utilizând proprietatea de asociativitate a legii de compoziție $\circ$ obținem:

$$\left(2009 \circ 2009\right) \circ \left(2009 \circ 2009\right) = 2009 \circ 2009 = 2009 .$$

d) Determinăm dacă $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Existența elementului e se determină din faptul că $x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde se obține că $e = 2010 \in \mathbb{R}$. Se demonstrează că legea "$\circ$" este comutativă pe $\mathbb{R}$ adică $x \circ y = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Deci $\exists e = 2010 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

e) $\forall x, y \in H, x \circ y \geq 2009 \Leftrightarrow \forall x, y \in H, xy - 2009\left(x + y\right) + 2009^2 + 2009 \geq 2009 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in H, \left(x - 2009\right)\left(y - 2009\right) \geq 0$ adevărat.

f) Ecuația devine $x^2 - x\left(1 + 2 \cdot 2009\right) + 2 \cdot 2009 = 0$ ce are mulțimea soluțiilor $\left\{1; 4018\right\}$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\left(x*y\right)*z=x*\left(y*z\right)=\frac{(x+1)(y+1)(z+1)-1}{4}$

b) Din $x*e=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{(x+1)(e+1)}{2}-1=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e(x+1)=x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=1\in\mathbb{R}$.

c) Pentru a arăta că $\left(\mathbb{R},*\right)$ nu este grup, este suficient să demonstrăm că există un număr real nesimetrizabil în raport cu legea "$*$". $x\in\mathbb{R}$ este simetrizabil $\Leftrightarrow\exists x'\in\mathbb{R}$ a..î. $x*x'=x'*x=e$. Din punctul **b)** şi din faptul ca legea "$*$" este comutativă avem că $\exists e=1\in\mathbb{R}$, $x*1=1*x=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, deci $e=1$ este element neutru al legii "$*$". Din $x'\neq x\ \ 1$ obţinem $x'=\frac{4}{x+1}-1\in\mathbb{R}$, doar pentru $x\neq-1$. Deci -1 este nesimetrizabil şi în consecinţă $\left(\mathbb{R},*\right)$ nu este grup.

d) Deoarece $\left(-1\right)*y=\left(-1\right)\forall y\in\mathbb{R}$, şi legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R}$, obţinem:

$$\underbrace{\left(-1\right)*0*1*\left(-1\right)*0*1*...*\left(-1\right)*0*1}_{201\,termeni}=\left(-1\right)*\underbrace{\left[0*1*\left(-1\right)*0*1...*\left(-1\right)*0*1\right]}_{y}=\left(-1\right)*y=\left(-1\right).$$

e) Întocmind tabla legii de compoziţie "$\circ$" pe mulţimea H obţinem în interiorul acesteia doar elementele lui H. Deci $\forall x,y\in H\Rightarrow x\circ y\in H$.

f) Din tablă obţinem elementul neutru $e=1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\left(x*y\right)*z=x*\left(y*z\right)=\dfrac{xyz+xz+yz+xy+x+y+z-3}{4}$.

b) $x*\left(-1\right)=\dfrac{-x+x-1-1}{2}=-1,\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Deoarece $x*\left(-1\right)=\left(-1\right)*x=\left(-1\right),\forall x\in\mathbb{R}$, și legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R}$, obținem:

$$\left[\underbrace{\left(-2009\right)*\left(-2008\right)*...*\left(-2\right)}_{x}\right]*\left(-1\right)*\left[\underbrace{0*1...*2008*2009}_{y}\right]=x*\left(-1\right)*y=\left(x*\left(-1\right)\right)*y=\left(-1\right)*y=-1.$$

d) Se demonstrează că $\exists e\in\mathbb{R}$ a.î. $x*e=e*x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.
Existența elementului e se determină din faptul că $x*e=x,\forall x\in\mathbb{R}$, de unde se obține ca $e=1$.

e) Întocmind tabla legii de compoziție "$\circ$" pe mulțimea H obținem în interiorul acesteia doar elementele lui H. Deci $\forall x,y\in H\Rightarrow x\circ y\in H$.

f) Din tablă obținem elementul neutru $e=1$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se demonstrează că $\forall x \geq 1$ şi $\forall y \geq 1, x * y \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2y^2 - x^2 - y^2 + 2 \geq 1 \Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1) \geq 0$ adevărat.

b) Se demonstrează că $\forall x, y, z \in I, (x * y) * z = x * (y * z) = \sqrt{x^2y^2z^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2y^2 + x^2 + y^2 + z^2}$

c) Se arată că $\exists e \in I$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in I$. Se demonstrează că legea $*$ este comutativă pe I adică $x * y = y * x, \forall x, y \in I$. Existența elementului e se determină din $x * e = x, \forall x \in I$ de unde se obține $e^2 = 2 \Leftrightarrow e = \pm\sqrt{2}$. Dar este bun doar $e = \sqrt{2} \in [1, \infty)$.

d) $(x * x)^2 - 1 = (x^2-1)^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - x^2 + 2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$ adevărat

e) Se întocmeşte tabla legii de compoziție "$*$" pe mulțimea H.

f) Din tablă obținem elementul neutru $e = \sqrt{2}$ şi faptul că 0 şi $\sqrt{2}$ sunt simetrizabile în raport cu legea "$*$" simetricele lor fiind $\sqrt{2}$ respectiv 0.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se arată că $\exists e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x*e=e*x=x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Se demonstrează că legea $*$ este comutativă pe $\mathbb{Z}$ adică $x*y=y*x, \forall x,y \in \mathbb{Z}$. Existența elementului e se determină din $x*e=x$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ de unde se obține $e=2 \in \mathbb{Z}$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y,z \in \mathbb{Z}$ $(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z-4$.

c) $x \circ e=e \circ x=x, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e=3$.

d) Fie $x=2k+1$, $y=2p+1$, $k, p \in \mathbb{Z}$, $x \circ y=(2k+1)(2p+1)-2(2k+1)-2(2p+1)+6=$
$=2(2kp-k-p+1)+1 \in H$, $2kp-k-p+1 \in \mathbb{Z}$.

e) $(x*y) \circ z=(x+y-2) \circ z=(x+y-2) \cdot z-2(x+y-2)-2z+6=xz+yz-2x-2y-4z+10$.
$(x \circ z)*(y \circ z)=(xz-2x-2z+6)*(yz-2y-2z+6)=xz+yz-2x-2y-4z+10$.

f) Se arată că legea „$*$” este asociativă (din **b**), comutativă (din **a**), că admite element neutru (din **a)**) şi că orice element este simetrizabil în raport cu legea $*$.
Se arată că legea „$\circ$” este asociativă (prin calcul direct), că admite element neutru (din **c)**).
Se arată că legea „$\circ$” este distributivă față de legea „$*$” (din **e)**) și din comutativitatea legii "$\circ$".
Deci $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este inel.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Tablele legilor de compoziție "$\odot$" si "$\oplus$" sunt:

$\odot$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

b) $(5\oplus 6)\odot 7=3\odot 7=5$ şi $(5\odot 7)\oplus(6\odot 7)=3\oplus 2=5$. Deci $(5\oplus 6)\odot 7=(5\odot 7)\oplus(6\odot 7)$.

c) Din tabla legii deducem că $7\odot 7=1$ si 1 este elementul neutru al legii $\odot$.

Datorită asocitativității $\underbrace{7\odot 7\odot\ldots\odot 7}_{2010\,cifre}=\underbrace{(7\odot 7)\odot\ldots(7\odot 7)}_{1005\,grupe}=\underbrace{1\odot 1\odot\ldots\odot 1}_{1005\,cifre}=1$

d) Fie $x\in M$. x este simetrizabil dacă există $x'\in M$ astfel încât $x\odot x'=x'\odot x=1$. Obținem $\{1,3,5,7\}$ mulțimea elementelor simetrizabile în raport cu legea $\odot$ unde $1'=1, 3'=3, 5'=5, 7'=7$.

e) Se întocmește tabla legii $\oplus$ pe mulțimea H și pentru că $\forall x,y\in H$, $x\oplus y\in H$ se deduce că H este parte stabilă a lui M în raport cu legea $\oplus$.

f) $G=\{1,3,5,7\}$. Se întocmește tabla legii $\odot$ pe mulțimea G și se deduce că:

$\forall x,y\in G$ $x\odot y\in G$. Deci G este parte stabilă a lui M în raport cu legea $\odot$.

Legea $\odot$ fiind asociativă pe M este asociativă și pe $G\subset M$.

Legea $\odot$ este comutativă pe G deoarece tabla legii $\odot$ pe mulțimea G este simetrică față de diagonala principală, deci $\forall x,y\in G$, $x\odot y=y\odot x$.

1 este elementul neutru al legii $\odot$ și toate elementele lui G sunt simetrizabile.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Fie $x, y \in (1,+\infty)$, $x \circ y = 1+\log_3 x+\log_3 y = 1+\log_3 xy > 1$, pentru că $xy > 1$ și deci $\log_3 xy > 0$.

b) $a = (3^2 \circ 3^3) \circ 3^4 = \left(1+\log_3 3^2+\log_3 3^3\right) \circ 3^4 = 6 \circ 3^4 = 1+\log_3 6+\log_3 3^4 = \log_3 1458$.

$b = 3^2 \circ (3^3 \circ 3^4) = 3^2 \circ \left(1+\log_3 3^3+\log_3 3^4\right) = 3^2 \circ 8 = 1+\log_3 3^2+\log_3 8 = \log_3 216$. Deci $a > b$.

c) Deoarece $(3^2 \circ 3^3) \circ 3^4 \neq 3^2 \circ (3^3 \circ 3^4)$ legea „$\circ$” nu este asociativă pe G.

d) $3^m \circ 3^n = 1+\log_3 3^m+\log_3 3^n = m+n+1$.

e) $3^x \circ 9^x = 10 \Leftrightarrow 1+\log_3 3^x+\log_3 9^x = 10 \Leftrightarrow 1+x+2x = 10 \Leftrightarrow x = 3$. Deci $S = \{3\}$.

f) $S = (3^1 \circ 3^2)+(3^3 \circ 3^4)+(3^5 \circ 3^6)+\ldots+(3^{11} \circ 3^{12}) =$

$= (1+2+1)+(3+4+1)+(5+6+1)+\ldots+(11+12+1) = (1+2+3+\ldots+12)+6 = \frac{12 \cdot 13}{2}+6 = 84$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z+2m,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}..$

b) $x*(-6)=(-6)*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x-6+m=x\Leftrightarrow m=6$.

c) $x^2*x=x^2+x+m\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1.$

d) $x^2*x=0\Rightarrow x^2+x+m=0\Rightarrow\Delta=1-4m<0$, dar $m>0$ întreg, deci ecuația nu are soluții reale.

e) $(-x)*x*(y*(-y))=m*m=3m$.

f) $x*(-x)=m\Rightarrow m=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*y=2009(x-2009)(y-2009)+2009=2009(y-2009)(x-2009)+2009=y*x$ adevărat deoarece înmulțirea este comutativă pe $\mathbb{R}$.

b) $x*y=x \quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2009(x-2009)(y-2009)+2009=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x-2009)\left[2009(y-2009)-1\right]=0,\ \forall x\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2009}+2009\in\mathbb{R}$.

c) $x*z=z,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2009(x-2009)(z-2009)+2009=z,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (z-2009)\left[2009(x-2009)-1\right]=0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow z=2009\in\mathbb{R}$.

d) Se demonstrează că $\forall x,y\in\mathbb{R}-\{2009\}\ \ x*y\in\mathbb{R}-\{2009\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2009(x-2009)(y-2009)+2009\neq 2009\Leftrightarrow (x-2009)(y-2009)\neq 0$ adevărat.

e) Se demonstrează că legea $*$ este asociativă pe $\mathbb{R}-\{2009\}$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}-\{2009\}$.

$(x*y)*z=x*(y*z)=2009^2(x-2009)(y-2009)(z-2009)+2009$. La punctul **a)** s-a demonstrat că legea $*$ este comutativă. Deoarece legea este comutativă, din punctul **b)** obținem că $\exists e=\dfrac{1}{2009}+2009\in\mathbb{R}$ elementul neutru al legii "$*$" definită pe $\mathbb{R}\setminus\{2009\}$. Deci legea "$*$" este asociativă, comutativă și are element neutru pe $\mathbb{R}\setminus\{2009\}$. Se demonstrează că orice element din $\mathbb{R}\setminus\{2009\}$ este simetrizabil.

$x*x'=x'*x=\dfrac{1}{2009}+2009$. Din $x*x'=\dfrac{1}{2009}+2009$ obținem $x'=\dfrac{1}{2009^2(x-2009)}+2009$.

$x'\in\mathbb{R}\setminus\{2009\},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2009\}$. Deci $(\mathbb{R}\setminus\{2009\},*)$ este grup.

f) Se alege $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. De exemplu $a=\sqrt{2}$. Obținem $\sqrt{2}*b=2009\left(\sqrt{2}-2009\right)(b-2009)+2009\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow b-2009=\sqrt{2}+2009$ de unde $b=\sqrt{2}+2\cdot 2009$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $5*x=5*2k=u.c(10k)=0$.

b) Tabla legii de compoziție $*$ este:

$*$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	2	8	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

c) Legea $*$ este asociativă deci $N=\underbrace{[1*2*3]}_{x}*(4*5)*\underbrace{[6*7*8*9]}_{y}=(x*0)*y=0$.

d) Elementul neutru al legii $*$ este 1, deoarece $1*x=x*1=x$, $\forall x\in M$.
Elementele $x\in M$ simetrizabile sunt acele elemente pentru care există $x'\in M$ a.î. $x*x'=x'*x=1$.
Din tablă se obține că $1,3,7$ si 9 sunt simetrizabile simetricele lor fiind $1,7,3$ si respectiv 9

e) Întocmind tabla legii de compozitie $*$ pe mulțimea H

$*$	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2	0	4	8	2	6
4	0	8	6	4	8
6	0	2	4	6	8
8	0	6	2	8	4

se obține că $\forall x,y\in H$ $x*y\in H$ deci H este parte stabilă a mulțimii M în raport cu legea $*$.

f) $(x*3)*7=9\Leftrightarrow x*3=7\Leftrightarrow x=9$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $10 * x = r$ unde r este restul împărțirii lui $10 \cdot x$ la 10.
Cum $(10 \cdot x) : 10 = x$ rest 0 obținem $10 * x = 0 \ \forall x \in \mathbb{N}$

b) Deoarece $*$ este asociativă, $5*5*5*5*5 = 5*(5*5)*(5*5) = 5*(5*5) = 5*5 = 5$

c) Se scrie tabla legii de compoziție "$*$" pe mulțimea I

$*$	1	3	5	7	9
1	1	3	5	7	9
3	3	9	5	1	7
5	5	5	5	5	5
7	7	1	5	9	3
9	9	7	5	3	1

De aici se obține că $\forall x, y \in I$, $x * y \in I$.

d) Din tabla legii de compoziție "$*$" pe mulțimea $I \setminus \{5\}$ obținem că $\forall x, y \in I \setminus \{5\}$ $x * y \in I \setminus \{5\}$, obținem că legea "$*$" este comutativă, tabla legii "$*$" fiind simetrică față de diagonala principală, că 1 este elementul neutru al legii "$*$" pe mulțimea $I - \{5\}$ și ca orice element din mulțimea $I - \{5\}$ este simetrizabil în raport cu legea "$*$": $1' = 1$, $3' = 7$, $7' = 3$, $9' = 9$. Legea "$*$" fiind și asociativă obținem că $(I \setminus \{5\}, *)$ grup comutativ.

e) Deoarece "$*$" este asociativă pe $\mathbb{N}$ avem $A = 2*4*6*...*2010 = \underbrace{(2*4*6*8)}_{x} * 10 * \underbrace{(12*...*2010)}_{y} =$

$= x * (10 * y) = x * 0 = 0$.

f) Se presupune că legea de compoziție "$*$", definită pe mulțimea $\mathbb{N}$, admite element neutru, adică există $e \in \mathbb{N}$ astfel încât oricare ar fi $\forall x \in \mathbb{N}$, $e * x = x$.
Pentru $x > 10$, înseamnă că restul împărțirii lui $e \cdot x$ la 10 este x ceea ce este absurd, restul împărțirii fiind mai mic strict decât împărțitorul.
Deci legea de compoziție "$*$", definită pe mulțimea $\mathbb{N}$, nu admite element neutru.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se arată că $\forall x=2^n\in M, \forall y=2^m\in M$, $x\cdot y=2^n\cdot 2^m\in M \Leftrightarrow 2^{n+m}\in M$, adevărat pentru că $n+m\in\mathbb{Z}$.

b) Deoarece înmulțirea numerelor raționale este asociativă și comutativă și admite element neutru pe 1 și deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu înmulțirea și $1=2^0\in M$ obținem că $(M,\cdot)$ este o structură comutativă, asociativă și cu 1 element neutru. Se arată că $\forall x=2^n\in M\ \exists x'\in M$ a.î. $x\cdot x'=x'\cdot x=1$.

Se obține $x'=\frac{1}{2^n}=2^{-n}\in M$. Deci $(M,\cdot)$ este grup comutativ.

c) Se demonstrează că $\forall x=n^2,\ y=m^2\in P.\ x\cdot y=n^2\cdot m^2\in P\Leftrightarrow (n.m)^2\in P$, adevărat pentru că $n\cdot m\in\mathbb{Z}$.

d) Fie $x=n^2\in P.$ x este inversabil $\Leftrightarrow \exists x'\in N$ a.î. $x\cdot x'=x'\cdot x=1$.

Adică $x'=\frac{1}{n^2}=\left(\frac{1}{n}\right)\in P\Leftrightarrow \frac{1}{n}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow n=\pm 1.$ Deci mulțimea elementelor inversabile ale lui P este $\{\pm 1\}$

e) Se arată că $2^k\cdot 2^{k+1}\cdot 2^{k+2}\cdot 2^{k+3}\in P$, $\forall k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\ 2^{4k+6}=\left(2^{2k+3}\right)^2\in P$, adevărat pentru că $2^{2k+3}\in\mathbb{N}$.

f) Se demonstrează că $\exists n=2\in\mathbb{Z}$ a.î. $2^n=n^2$ deci $M\cap P\neq\varnothing.$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*8=8, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}\quad (x*y)*z=x*(y*z)=8^2(x-8)(y-8)(z-8)+8$.

c) Asociind corespunzător termenii obținem $\left(\underbrace{(-8)*(-7)*...*(-1)*0*1*...*7}_{x}\right)*8=x*8=8$.

d) Se demonstrează că $\forall x,y\in H\ \ x*y\in H \Leftrightarrow 8(x-8)(y-8)+8\geq 8\Leftrightarrow 8(x-8)(y-8)\geq 0$ adevărat.

e)Legea "$*$" este comutativă. $x*e=x\Leftrightarrow 8(x-8)(e-8)+8=x\Rightarrow e=8+\frac{1}{8}\in H$.

f) $a*b=8(a-8)(b-8)+8$. Se alege $a-8=\frac{1}{2},\ b-8=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{17}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z},\ b=\frac{33}{4}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și

$a*b=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+8=9\in\mathbb{Z}$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $10*x=0$ pentru că $(10\cdot x):10=x$ rest 0, $\forall x\in\mathbb{N}$.

b) $6*6*6*6=(6*6)*(6*6)=6*6=6$ (s-a aplicat proprietatea de asociativitate a legii "$*$")

c) Se demonstrează că $\forall x,y\in P$, $x*y\in P$ ceea ce rezultă din tabla legii "$*$".

d) Din tabla legii, deoarece este simetrică față de diagonala principală, rezultă că legea "$*$" este comutativă.(1) Din tabla legii deducem că 6 este element neutru (2) și că orice element din P este simetrizabil (3): $2'=8$, $4'=4$, $6'=6$, $8'=2$. Din punctul **c)** din faptul că "$*$" este asociativă (ipoteză), comutativă (1), admite element neutru (2) și orice element este simetrizabil (3) se deduce că $(P,*)$ este grup comutativ.

e) $(x*2)*4=8\Leftrightarrow x*2=2\Leftrightarrow x=6\in P$.

f) Datorită asociativității legii "$*$"

$A=1*2*3*...*2009=\underbrace{(1*2*...*9)}_{x}*10*\underbrace{(11*...*2009)}_{y}=x*10*y=(x*10)*y=0*y=0$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $1=1^2+2\cdot 0^2\in M$; $2=0^2+2\cdot 1^2\in M$; $4=2^2+2\cdot 0^2\in M$; $6=2^2+2\cdot 1^2\in M$; $8=0^2+2\cdot 2^2\in M$; $9=1^2+2\cdot 2^2\in M$. Deci $\forall x\in H\Rightarrow x\in M$ adică $H\subset M$.

b) Dacă $a=1\in\mathbb{N}$ şi $b=0\in\mathbb{N}$, $1=1^2+2\cdot 0^2$.

c) Unicul element inversabil din mulţimea M este 1 şi inversul său este tot 1.

d) $9*2=u.c.(9^2)=1$, $2*9=u.c.(2^9)=2$. Deci $9*2\neq 2*9$

e) Se scrie tabla legii de compoziţie $*$ pe mulţimea H

$*$	1	2	4	6	8	9
1	1	1	1	1	1	1
2	2	4	6	4	6	2
4	4	6	6	6	6	4
6	6	6	6	6	6	6
8	8	4	6	4	6	8
9	9	1	1	1	1	9

Din tablă se obţine $\forall x,y\in H, x*y\in H$.

f) Deoarece tabla legii "$*$" pe submulţimea $H_1=\{4,6\}\subset H$ este simetrică faţă de diagonala principală legea "$*$" este comutativă pe H_1.

$*$	4	6
4	6	6
6	6	6

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $7*x=7x-7(7+x)+7^2+7=7$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $(x-7)(y-7)+7=xy-7x-7y+7^2+7=x*y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

c) Se demonstrează că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ $(x*y)*z=x*(y*z)=(x-7)(y-7)(z-7)+7$.

d) $x*y=\left(6+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(6-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-7\left(6+\frac{1}{\sqrt{2}}+6-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+7^2+7=\frac{15}{2}\in M$.

e) Se demonstrează că $\exists e\in M$ a.î. $\forall x\in M$ $x*e=e*x=x$. Se obține $e=8\in M$.

f) Utilizând proprietatea de asociativitate a legii "$*$" și punctul **a)** se obține $1*2*...*2008=7$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Fie $x=a+b\sqrt{2}, y=c+d\sqrt{2}\in M, a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$x+y=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$ și deoarece $a+c\in\mathbb{Z}$ și $b+d\in\mathbb{Z}$ se obține că $x+y\in M$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y\in M \quad x\cdot y\in M$

Fie $x=a+b\sqrt{2}$ și $y=c+d\sqrt{2}\in M$, $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$

$x\cdot y=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}$ și deoarece $ac+2bd\in\mathbb{Z}$ și $ad+bc\in\mathbb{Z}$ se obține că $x\cdot y\in M$

c) $0=0+0\cdot\sqrt{2}\in M$ și $1=1+0\cdot\sqrt{2}\in M$ deci $\{0,1\}\subset M$.

d) Deoarece 1 este element neutru al operatiei "$\cdot$"definită pe $\mathbb{R}$ și $1\in M$ rezultă 1 este element neutru al operației "$\cdot$" definită pe *M*.

$5-\sqrt{2}$ este inversabil in raport cu "$\cdot$" $\Leftrightarrow\exists m+p\sqrt{2}\in M$ astfel încât $\left(m+p\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)=1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}5p-m=0\\5m-2p=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5p\\5\cdot5p-2p=1\end{cases}\Leftrightarrow p=\frac{1}{23}, m=\frac{5}{23}$. Dar $\frac{5}{23},\frac{1}{23}\notin\mathbb{Z}$ deci $\nexists m+p\sqrt{2}\in M$ astfel încât $\left(m+p\sqrt{2}\right)\left(5-\sqrt{2}\right)=1$ adică $5-\sqrt{2}$ nu este element inversabil în raport cu operația "$\cdot$"

e) Știind că adunarea pe $\mathbb{R}$ este asociativă si comutativă și admite elementul neutru *e* = 0 și deoarece $\{0\}\subset M$, iar $M\subset\mathbb{R}$ obținem că adunarea este asociativă si comutativă și pe M, iar 0 este element neutru al acestei operații definite pe M. Deci $(M,+)$ este grup comutativ.

f) Fie $x=a+b\sqrt{2}\in H$, $a^2-2b^2=1$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Elementul x este element inversabil al lui H în raport cu operația "$\cdot$" $\Leftrightarrow\exists x'=a'+b'\sqrt{2}\in H$ astfel încât $x\cdot x'=x'\cdot x=1$ Din egalitatea $x\cdot x'=1$ se obține $x'=a-b\sqrt{2}\in H$, $\forall x=a+b\sqrt{2}\in H$ și analog din egalitatea $x'\cdot x=1$, adică orice element al mulțimii *H* este inversabil în raport cu operația "$\cdot$".

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x=\sqrt{2}$ și $y=-\sqrt{2}$, atunci $x*y=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)-2}{\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)-3}=\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}$.

b) Fie $x,y\in I_1$. Se demonstrează că $x*y\in I_1$.

$x*y\in I_1\Leftrightarrow\dfrac{xy-2}{x+y-3}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{xy-2-x-y+3}{x+y-3}\le 1\Leftrightarrow\dfrac{(x-1)(y-1)}{x+y-3}\le 0$ adevărat $\forall x,y\in(-\infty,1]$.

c) Legea "$*$" este asociativă $\Leftrightarrow$ $\forall x,y,z\in I_1\left(x*y\right)*z=x*\left(y*z\right)$.

$$\left(x*y\right)*z=\left(\frac{xy-2}{x+y-3}\right)*z=\frac{\dfrac{xy-2}{x+y-3}\cdot z-2}{\dfrac{xy-2}{x+y-3}+z-3}=\frac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+xz+yz-3x-3y-3z+7}.$$

Prin calcul $x*\left(y*z\right)=\dfrac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+xz+yz-3x-3y-3z+7}$.

d) $x*1=1\Leftrightarrow\dfrac{x\cdot 1-2}{x+1-3}=1\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{x-2}=1$ adevărat $\forall x\in(-\infty,1]$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației este $S=I_1$.

e) Presupunem că $\exists e\in I_1$ astfel încât $\forall x\in I_1\quad x*e=e*x=x$. Din $x*e=x\quad\forall x\in I_1$ obținem $x^2-3x+2=0\quad\forall x\in I_1$, absurd. Deci legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I_1.

f) Datorită asocitivității legii "$*$" și a punctelor **b)** și **d)**

$$A=(-2009)*(-2008)*\ldots*(-1)*0*1=\left[\underbrace{(-2009)*(-2008)*\ldots*(-1)*0}_{x\in I_1}\right]*1=x*1=1.$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Fie $x=\sqrt{7}$, $y=5$, atunci $x*y=\dfrac{xy-6}{x+y-5}=\dfrac{5\sqrt{7}-6}{\sqrt{7}}=5-\dfrac{6}{\sqrt{7}}>\dfrac{5}{2}$. Deci $x*y\in I$.

b) Fie $x,y\in I_1$. Se demonstrează că $x*y\in I_1$.

$x*y\in I_1\Leftrightarrow\dfrac{xy-6}{x+y-5}\geq 3\Leftrightarrow\dfrac{xy-3x-3y+9}{x+y-5}\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{(x-3)(y-3)}{x+y-5}\geq 0$ adevărat $\forall x,y\in[3,\infty)$.

c) Legea "$*$" este asociativă $\Leftrightarrow$ $\forall x,y,z\in I_1(x*y)*z=x*(y*z)$

$$(x*y)*z=\left(\frac{xy-6}{x+y-5}\right)*z=\frac{\dfrac{xy-6}{x+y-5}\cdot z-6}{\dfrac{xy-6}{x+y-5}+z-5}=\frac{xyz-6x-6y-6z+30}{xy+xz+yz-5x-5y-5z+19}.$$

Prin calcul $x*(y*z)=\dfrac{xyz-6x-6y-6z+30}{xy+xz+yz-5x-5y-5z+19}$.

d) $3*x=3\Leftrightarrow\dfrac{3\cdot x-6}{3+x-5}=3\Leftrightarrow\dfrac{3(x-2)}{(x-2)}=3$ adevărat $\forall x\in[3,\infty)$

e) Presupunem că $\exists e\in I_1$ astfel încât $\forall x\in I_1$ $x*e=e*x=x$ Din $x*e=x$ $\forall x\in I_1$ obținem $x^2-5x+6=0$ $\forall x\in I_1$, absurd. Deci legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I_1.

f) Datorită asociativității legii "$*$" și a punctelor b) și d)

$$A=3*4*5*...*2007*2008=3*\left[\underbrace{4*5*...*2007*2008}_{x\in I_1}\right]=3*x=3.$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $(x-1)*x=-1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1$.

b) $e=0$.

c) $(x*y)*z=x*(y*z)=xyz+xy+xz+yz+x+y+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

d) Fie $x=2p,\ y=2q,\ p,q\in\mathbb{Z}$. $x*y=2(2pq+p+q)\in H$.

e) $a=-1$.

f) $x'=-1+\dfrac{1}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=0\in H$ sau $x=-2\in H$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x=\sqrt{5}$ și $y=3$, atunci $x*y=\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+3-3}=\dfrac{3\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}=3-\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{3}{2}$.

b) Fie $x,y\in I$. Se demonstrează că $x*y\in I$.

$x*y\in I \Leftrightarrow \dfrac{xy-2}{x+y-3}\geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{xy-2-2x-2y+6}{x+y-3}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(y-2)}{x+y-3}\geq 0$ adevărat $\forall x,y\in[2,\infty)$.

c) Legea "$*$" este asociativă $\Leftrightarrow$ $\forall x,y,z\in I\,(x*y)*z=x*(y*z)$.

$$(x*y)*z=\left(\frac{xy-2}{x+y-3}\right)*z=\frac{\dfrac{xy-2}{x+y-3}\cdot z-2}{\dfrac{xy-2}{x+y-3}+z-3}=\frac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+xz+yz-3x-3y-3z+7}.$$

Prin calcul $x*(y*z)=\dfrac{xyz-2x-2y-2z+6}{xy+xz+yz-3x-3y-3z+7}$.

d) $2*x=2\Leftrightarrow\dfrac{2\cdot x-2}{2+x-3}=2\Leftrightarrow\dfrac{2(x-1)}{(x-1)}=2$ adevărat $\forall x\in[2,\infty)$.

e) Presupunem că $\exists e\in I$ astfel încât $\forall x\in I \quad x*e=e*x=x$. Din $x*e=x \quad \forall x\in I$ obținem $x^2-3x+2=0$ $\forall x\in I$, absurd. Deci legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I.

f) Datorită asociativității legii "$*$" a punctelor **b)** și **d)**

$$A=2*3*4*...*2007*2008*2009=2*\left(\underbrace{3*4*...*2007*2008*2009}_{x\in I}\right)=2*x=2.$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Dacă $x=\sqrt{3}$ și $y=-\sqrt{3}$, atunci $x*y=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)-6}{\sqrt{3}+\left(-\sqrt{3}\right)-5}=\dfrac{9}{5}<2$. Deci $x*y\in I$.

b) Fie $x,y\in I$. Se demonstrează că $x*y\in I$.

$x*y\in I\Leftrightarrow\dfrac{xy-6}{x+y-5}\le 2\Leftrightarrow\dfrac{xy-2x-2y+4}{x+y-5}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{(x-2)(y-2)}{x+y-5}\le 0$ adevărat $\forall x,y\in(-\infty,2]$.

c)Legea "$*$" este asociativă pe $I=(-\infty,2]\Leftrightarrow\ \forall x,y,z\in I\,(x*y)*z=x*(y*z)$

$$(x*y)*z=\left(\frac{xy-6}{x+y-5}\right)*z=\frac{\dfrac{xy-6}{x+y-5}\cdot z-6}{\dfrac{xy-6}{x+y-5}+z-5}=\frac{xyz-6x-6y-6z+30}{xy+xz+yz-5x-5y-5z+19}.$$

Prin calcul $x*(y*z)=\dfrac{xyz-6x-6y-6z+30}{xy+xz+yz-5x-5y-5z+19}$.

d) $x*2=2\Leftrightarrow\dfrac{x\cdot 2-6}{x+2-5}=2\Leftrightarrow\dfrac{2(x-3)}{x-3}=2$ adevărat $\forall x\in(-\infty,2]$.

e) Presupunem că $\exists e\in I$ astfel încât $\forall x\in I$, $x*e=e*x=x$. Din $x*e=x$, $\forall x\in I$ obținem $x^2-5x+6=0$, $\forall x\in I$, absurd. Deci legea "$*$" nu admite element neutru pe mulțimea I.

f) Datorită asociativității legii "$*$" și a punctelor **b)** și **d)**.

$$A=(-2008)*(-2007)*\ldots*0*1*2=\left[\underbrace{(-2008)*(-2007)*\ldots*0*1}_{x\in I_1}\right]*2=x*2=2.$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se alege $x=a+b\sqrt{3}\ \ a,b\in\mathbb{Z}$, $y=m+n\sqrt{3}\ m,n\in\mathbb{Z}$.

$x\cdot y=(am+3mn)+(an+bm)\sqrt{3}$ unde $am+3mn,an+bm\in\mathbb{Z}$. Deci $x\cdot y\in M$

b) Se alege $x=a+b\sqrt{3}\ \ a,b\in\mathbb{Z}$, $y=m+n\sqrt{3}\ m,n\in\mathbb{Z}$.

$x+y=(a+m)+(b+n)\sqrt{3}$ unde $a+m,b+n\in\mathbb{Z}$. Deci $x+y\in M$.

c) $0=0+0\sqrt{3}\in M$,$1=1+0\sqrt{3}\in M$. Deci $\{0,1\}\subset M$

d) Operația „+” este comutativă pe $\mathbb{R}$ și admite element neutru pe 0. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „+” se obține că „+” este comutativă și asociativă pe M și cum $0\in M$, 0 este element neutru al operației „+” pe mulțimea M. Orice element $a+b\sqrt{3}$ are ca opus pe $-a-b\sqrt{3}\in M$. (1)
Operația „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe $\mathbb{R}$ și admite elementul neutru 1. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\cdot$” se obține că „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe M și cum $1\in M$, 1 este elementul neutru al operației „$\cdot$” pe mulțimea M .(2)
Înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare, deci și pe M înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare. (3)
Din (1), (2),(3) se obține că $(M,+,\cdot)$ este inel comutativ.

e)Dacă $x=2-\sqrt{3}$ atunci simetricul elementului x în raport cu operația „$\cdot$” este $\frac{1}{x}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}\in M$

f) Deoarece din punctul precedent $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ alegem $x=2-\sqrt{3}$ și $y=-2-\sqrt{3}$ $x,y\in M\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $x\cdot y=-1\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se alege $x=a+b\sqrt{15}\ \ a,b\in\mathbb{Z}$, $y=m+n\sqrt{15}\ \ m,n\in\mathbb{Z}$.

$x\cdot y=\left(am+15mn\right)+\left(an+bm\right)\sqrt{15}$ unde $am+15mn,an+bm\in\mathbb{Z}$. Deci $x\cdot y\in M$

b) Se alege $x=a+b\sqrt{15}\ \ a,b\in\mathbb{Z}$, $y=m+n\sqrt{15}\ \ m,n\in\mathbb{Z}$.

$x+y=\left(a+m\right)+\left(b+n\right)\sqrt{15}$ unde $a+m,b+n\in\mathbb{Z}$. Deci $x+y\in M$.

c) $0=0+0\sqrt{15}\in M$,$1=1+0\sqrt{15}\in M$. Deci $\{0,1\}\subset M$.

d) Operația „+” este comutativă pe $\mathbb{R}$ și admite elementul neutru 0. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „+” se obține că „+” ete comutativă și asociativă pe M și cum $0\in M$, 0 este element neutru al operației „+” pe mulțimea M. Orice element $x=a+b\sqrt{15}$ are ca opus pe $-a-b\sqrt{15}\in M$. (1)
Operația „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe $\mathbb{R}$ și admite elementul neutru 1. Deoarece M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu „$\cdot$” se obține că „$\cdot$” este comutativă și asociativă pe M și cum $1\in M$, 1 este elementul neutru al operației „$\cdot$” pe mulțimea M .(2)
Înmulțirea numerelor reale este distributivă față de adunare, deci și pe M înmulțirea numerelor este distributivă față de adunare. (3)
Din (1), (2),(3) se obține că $\left(M,+,\cdot\right)$ este inel comutativ.

e)Dacă $x=4-\sqrt{15}$ atunci simetricul elementului x în raport cu operația „$\cdot$” este $\frac{1}{x}=\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{4+\sqrt{15}}{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)}=\frac{4+\sqrt{15}}{16-15}=4+\sqrt{15}\in M$.

f)Deoarece din punctul precedent $\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)=1$ alegem $x=4-\sqrt{15}$ și $y=-4-\sqrt{15}$ $x,y\in M\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $x\cdot y=-1\in\mathbb{Q}\setminus\{1\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x\perp y+\frac{(2-x)(2-y)}{2}-2=x+y-\frac{xy}{2}+\frac{4-2x-2y+xy}{2}-2=0,\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

b) Demonstrăm că $(x\perp y)\perp z=x\perp(y\perp z),\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$.

Din punctul **a)** avem $x\perp y=2-\frac{(2-x)(2-y)}{2},\forall x,y\in\mathbb{Q}$.

$$(x\perp y)\perp z=\left(2-\frac{(2-x)(2-y)}{2}\right)\perp z=2-\frac{\frac{(2-x)(2-y)}{2}(2-z)}{2}=2-\frac{(2-x)(2-y)(2-z)}{4}=$$

$x\perp(y\perp z),\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$.

c) Căutăm $e\in\mathbb{Q}$ astfel ca $x\perp e=e\perp x=x,\forall x\in\mathbb{Q}$.

Din $x\perp y=y\perp x,\forall x,y\in\mathbb{Q}$, rezultă că legea este comutativă.

Din $x\perp e=2-\frac{(2-x)(2-e)}{2},\forall x\in\mathbb{Q}\Rightarrow 2-\frac{(2-x)(2-e)}{2}=x,\forall x\in\mathbb{Q}\Rightarrow e=0\in\mathbb{Q}$.

d) Căutăm $a\in\mathbb{Q}$ astfel ca $x\perp a=a,\forall x\in\mathbb{Q}$. Dar $x\perp a=2-\frac{(2-x)(2-a)}{2},\forall x\in\mathbb{Q}$

Deci $2-\frac{(2-x)(2-a)}{2}=a,\forall x\in\mathbb{Q}\Rightarrow a=2$.

e) Din $x\perp y=2-\frac{(2-x)(2-y)}{2}\Rightarrow x\perp y\neq 2$ pentru orice $x\neq 2,\ y\neq 2\Rightarrow M$ este parte stabilă a mulțimii numerelor raționale în raport cu legea "$\perp$". Din punctele anterioare, $(M,\perp)$ monoid comutativ. Se demonstrează că $\forall x\in M,\exists x'\in M$ astfel încât $x\perp x'=x'\perp x=0$. Dar

$\perp\ '\Rightarrow x\ \to x\quad 2\ \frac{(2-x)(2-x')}{2}\Rightarrow x'=2-\frac{4}{2-x}\in M,\forall x\in M$, deci $(M,\perp)$ grup comutativ.

f) Folosind punctele **b)** și **d)** se obține că $(-8)\perp(-7)\perp\ldots\perp 0\perp 1\perp 2\perp\ldots\perp 8=$

$=\left[(-8)\perp(-7)\perp\ldots\perp 0\perp 1\right]\perp 2\perp\left[3\perp\ldots\perp 8\right]=x\perp 2\perp y=2\perp y=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Tabla legii este:
Se observă că $\forall x, y \in H$, avem $x \circ y \in H$.

"$\circ$"	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	3	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

b) $1 \circ 2 = 3$ și că $2 \circ 1 = 1$, deci $1 \circ 2 \neq 2 \circ 1$ legea de compoziție nu este comutativă pe H.

c) $(2 \circ 3) \circ 4 = 1 \circ 4 = 3$ iar $2 \circ (3 \circ 4) = 2 \circ 1 = 1$, deci $(2 \circ 3) \circ 4 \neq 2 \circ (3 \circ 4)$, deci legea de compoziție „$\circ$” nu este asociativă pe H.

d) Se observă din tabla legii de compoziție realizată mai sus că $x \circ 0 = 0 \circ x = x, \forall x \in H$. Deci legea de compoziție „$\circ$” admite pe 0 element neutru pe H.

e) Din tablă avem: $0 \circ 0 = 0$, $1 \circ 1 = 0$, $2 \circ 2 = 0$, $3 \circ 3 = 0$, $4 \circ 4 = 0$. $\Rightarrow$ $x \circ x = 0$, $\forall x \in H$.
Altfel: $x \circ x = x - x = 0$ deoarece $x \geq x, \forall x \in H$.

f) $(0 \circ 1) \circ (0 \circ 2) = 1 \circ 2 = 3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x\circ y=9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3},\forall x,y\in\mathbb{R}$. Demonstrăm că $x\circ y\geq\frac{1}{3}\forall x,y\in H$.

Din $x,y\in H\Rightarrow x-\frac{1}{3}\geq 0, y-\frac{1}{3}\geq 0$ deci $9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)\geq 0\Rightarrow x\circ y\geq\frac{1}{3},\ \forall x,y\in H$

b) $x\circ a=a\circ x=a,\forall x\in\mathbb{R}; x\circ a=9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\Rightarrow 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)=a-\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}.\Rightarrow a=\frac{1}{3}$.

c) $x\circ b=b\circ x=x,\forall x\in\mathbb{R}; x\circ b=9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\Rightarrow 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)=x-\frac{1}{3},\forall x\in\mathbb{R}.\Rightarrow b=\frac{4}{9}$.

d) $x\circ x'=x'\circ x=\frac{4}{9}\Rightarrow 9\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x'-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\Rightarrow x'=\frac{1}{3}+\frac{1}{81\left(x-\frac{1}{3}\right)},\forall x\in H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

$x'\in H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}\Rightarrow A=H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

e) Din punctul a**)** obținem că „$\circ$” este lege de compoziție. Din punctul **c)** obținem că legea de compoziție „$\circ$” admite elementul neutru $b=\frac{4}{9}$. Se verifică prin calcul asociativitatea și comutativitatea legii de compoziție „$\circ$” pe $H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Din d) obținem că toate elementele din $H\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ sunt simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

f) $9\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=2\Rightarrow\left(a-\frac{1}{3}\right)\left(b-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}\Rightarrow$ o alegere ar fi $a-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$ și $b-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow$ $a=\frac{8}{9},b=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și $a\circ b=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*e=e*x=x,\ \forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow e=0$.

b) $(-x)*(-y)=xy-x-y\Rightarrow x+y=0$.

c) Fie $x,y\in H\Rightarrow x=2k+1,\ y=2p+1,\ k,p\in\mathbb{Z}\Rightarrow x*y=2(2kp+2k+2p+1)+1\Rightarrow x*y\in H$.

d) $x*y=(x+1)(y+1)-1\Rightarrow (x*y)*z=(x+1)(y+1)(z+1)-1$.

e) $(2010*2009)*(-1)=2011\cdot 2010\cdot 0-1=-1$.

f) $x\in\mathbb{Z}$ și x simetrizabil $\Rightarrow \exists x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=e\Rightarrow x'=-1+\frac{1}{x+1}$ și $x'\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=0$ sau $x=-2$. $0*0=0;\ (-2)*(-2)=-2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Prin realizarea tablei operației obținem:

"$\circ$"	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	0	1	2	3
2	2	1	0	1	2
3	3	2	1	0	1
4	4	3	2	1	0

Se observă că $\forall x, y \in H$, avem $x \circ y \in H$.

b) Legea de compoziție este comutativă pe H deoarece $|x-y| = |y-x|, \forall x, y \in H$.

c) $(3 \circ 1) \circ 4 = 2 \circ 4 = 2$ iar $3 \circ (1 \circ 4) = 3 \circ 3 = 0$, $\Rightarrow (3 \circ 1) \circ 4 \neq 3 \circ (1 \circ 4) \Rightarrow$ legea de compoziție „$\circ$” nu este asociativă pe H.

d) Se observă din tabla legii de compoziție realizată mai sus că $x \circ 0 = 0 \circ x = x, \forall x \in H$.
Deci legea de compoziție „$\circ$” admite 0 element neutru pe H.

e) $x^2 \circ (-1) = |x^2 + 1| = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x \in \{-3, 3\}$

f) $x \circ 1 \leq 1 \Leftrightarrow |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$ și $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\frac{xy}{2xy-x-y+1}=\frac{2xy}{4xy-2x-2y+2}=\frac{2xy}{2x(2y-1)-1(2y-1)+1}=\frac{2xy}{(2x-1)(2y-1)+1},\forall x,y\in A.$

b) Fie $\left.\begin{array}{l} x\in A\Rightarrow 0\le x<1 \\ y\in A\Rightarrow 0\le y<1 \end{array}\right\}\Rightarrow xy\ge 0$ (1) și $xy-x-y+1>0$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow 2xy-x-y+1>0\Rightarrow \frac{xy}{2xy-x-y+1}\ge 0\Rightarrow x*y\ge 0$

Dar $xy-x-y+1>0\,|_{+xy>0}\Rightarrow 2xy-x-y+1>xy\ge 0\Rightarrow \frac{xy}{2xy-x-y+1}<1\Rightarrow x*y<1$

c) $(x*y)*z=\frac{xyz}{xy+xz+yz-x-y-z+1}=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in A.$

d) Căutăm $e\in[0,1)$ astfel ca $x*e=e*x=x,\forall x\in[0,1)$.

Dar $x*e=e*x=\frac{2xe}{(2x-1)(2e-1)+1}=x,\ \forall x\in[0,1)\Rightarrow e=\frac{1}{2}$.

e) Fie $x\in A$. Căutăm $x'\in A$ astfel încât $x*x'=x'*x=\frac{1}{2}$. Dar $x*x'=\frac{2xx'}{(2x-1)(2x'-1)+1}$

$\Rightarrow 4xx'=4xx'-2x-2x'+2\Rightarrow x'=1-x$. Dar $x'\in[0,1)\Rightarrow 1-x\in[0,1)\Rightarrow x\in(0,1]$ și $x\in[0,1)\Rightarrow x\in(0,1)\Rightarrow B=(0,1)$.

f) Din punctele anterioare am obținut că $\frac{1}{2}\in A\setminus\{0\}$ este element neutru și toate elementele din $A\setminus\{0\}$ sunt simetrizabile în raport cu „$*$”. Din **b)** rezultă că „$*$” este lege de compoziție, iar din **c)** rezultă asociativitatea. Se verifică faptul că legea „$*$” este comutativă pe $A\setminus\{0\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}=\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+1+1}=x*y,\ \forall x,y\in G$.

b) $\left.\begin{array}{l} x\in(1,+\infty)\Rightarrow x>1\Rightarrow x^2-1>0 \\ y\in(1,+\infty)\Rightarrow y>1\Rightarrow y^2-1>0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2y^2-x^2-y^2+1>0\Rightarrow\sqrt{x^2y^2-x^2-y^2+2}>1\Rightarrow x*y\in(1,+\infty).$

c) $x*2=\sqrt{3\left(x^2-1\right)+1}\Rightarrow 3\left(x^2-1\right)+1=4\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\sqrt{2}$.

d) $(x*y)*z=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+1}*z=\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)\left(z^2-1\right)+1}=x*(y*z),\forall x,y,z\in G$.

e) $x*e=e*x=\sqrt{x^2e^2-x^2-e^2+2}=x\Rightarrow e=\sqrt{2}\in G$.

f) $x*x'=\sqrt{x^2x'^2-x^2-x'^2+2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2x'^2-x^2-x'^2+2}=\sqrt{2}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x'^2\left(x^2-1\right)=x^2 \\ x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^2-1\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x'^2=\dfrac{x^2}{x^2-1},x\in(1,+\infty) \\ x'>1 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}},x\in(1,+\infty)$. Verificăm $x'\in G\Leftrightarrow\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>1\Leftrightarrow x>\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow 0>-1$, adevărat

$\Rightarrow\forall x\in(1,+\infty),\exists x'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}},x'\in(1,+\infty)$ astfel încât $x*x'=x'*x=\sqrt{2}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $(x-4)(y-4)+4=xy-4(x+y)+20=x\perp y,\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $x\perp(x+1)=4\Rightarrow(x-4)(x-3)=0\Rightarrow x\in\{3,4\}$

c) $x\perp y=(x-4)(y-4)+4$. Dar $x,y\in[4,+\infty)\Rightarrow x-4\geq 0, y-4\geq 0\Rightarrow x\perp y\geq 4,\forall x,y\in[4,+\infty)$.

d) Se demonstrează că $(x\perp y)\perp z=x\perp(y\perp z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$(x\perp y)\perp z=\left[(x-4)(y-4)+4\right]\perp z=(x-4)(y-4)(z-4)+4x=\perp(y\perp z)$.

e) $x\perp 5=(x-4)(5-4)+4=x,\forall x\in[4,+\infty)$ și $5\perp x=(5-4)(x-4)+4=x,\forall x\in[4,+\infty)\Rightarrow e=5$.

f) Se observă că $x\perp 4=4\perp x=4,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$1\perp 2\perp 3\perp 4\perp 5=(1\perp 2\perp 3)\perp(4\perp 5)=x\perp 4=4\Rightarrow A=4$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2}$ deci $x \circ y = x + y - \frac{1}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$. $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \circ \left(y^2 + \frac{1}{4}\right) = x^2 + y^2 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) $(x \circ y) \circ z = \left(x + y - \frac{1}{2}\right) \circ z = x + y + z - 1 = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

c) $e \in \mathbb{R}$ astfel ca $\left.\begin{array}{l} x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \circ e = x + e - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$.

d) Din **b)** și **c)** rezultă că legea "$\circ$" este asociativă și admite element neutru pe $\mathbb{R}$.

$x \circ y = x + y - \frac{1}{2} = y + x - \frac{1}{2} = y \circ x, \forall x, y \in \mathbb{R}$, deci legea "$\circ$" este comutativă.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x' = 1 - x \in \mathbb{R}$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = \frac{1}{2}$.

e) $\log_2 \left(x \circ x^2\right) = -2 \Rightarrow x \circ x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x + x^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

f) $\left(2^n + \frac{1}{4}\right) \circ \left(2^{n+1} + \frac{1}{4}\right) = 2^n + 2^{n+1} \Rightarrow 2^n + 2^{n+1} = 6 \Rightarrow 2^n = 2 \Rightarrow n = 1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*y=(x+1)(y+1)-1, \forall x,y\in\mathbb{Z}$. $(x*y)*z=(x+1)(y+1)(z+1)-1=x*(y*z), \forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

b) $(x+1)(e+1)-1=x, \forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow e=0$ element neutru pe $\mathbb{Z}$.

c) $x*x'=0\Rightarrow(x+1)(x'+1)=1\Rightarrow x'=\dfrac{1}{x+1}-1, \forall x\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$. Dar $x'\in\mathbb{Z}\Rightarrow(x+1)\,|\,1\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2.$

d) $\left.\begin{array}{l}3^x*3^{x+1}=7\Rightarrow\left(3^x+1\right)\left(3^{x+1}+1\right)=8\\ 3^x=t>0\end{array}\right\}\Rightarrow(t+1)(3t+1)=8\,.\,3t^2+4t-7=0\Rightarrow t\in\left\{-\dfrac{7}{3},1\right\}\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0.$

e) Se demonstrează că $x*(-1)=(-1)*x=-1, \forall x\in\mathbb{Z}$. Deci $0*(-1)*(-2)*...*(-13)=-1$.

f) $(x+1)(y+1)=2\Rightarrow (x,y)\in\{(0,1);(1,0);(-2,-3);(-3,-2)\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) Demonstrăm că $\forall x, y \in H$ avem $x * y \in H$.

Fie $\left.\begin{array}{l} x \in H \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \geq -1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x+1 \geq 0 \\ y \in H \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y \geq -1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y+1 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x+1)(y+1) \in \mathbb{Z}$ și $(x+1)(y+1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + x + y \in \mathbb{Z}$ și $xy + x + y \geq -1 \Rightarrow x * y \in H$.

b) Demonstrăm că $\forall x, y \in G$ avem $x \circ y \in G$.

Fie $\left.\begin{array}{l} x \in G \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x \leq 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}, x-1 \leq 0 \\ y \in G \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y \leq 1 \Rightarrow y \in \mathbb{Z}, y-1 \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)(y-1) \in \mathbb{Z}$ și $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1-(x-1)(y-1) \in \mathbb{Z}$ și $1-(x-1)(y-1) \leq 1 \Rightarrow x+y-xy \in \mathbb{Z}$ și $x+y-xy \leq 1 \Rightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ și

$x \circ y \leq 1 \Rightarrow x \circ y \in G$.

c) $\left.\begin{array}{l} (x \circ y) \circ z = 1 + (x-1)(y-1)(z-1) \\ x \circ (y \circ z) = 1 + (x-1)(y-1)(z-1) \end{array}\right\} \Rightarrow (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \forall x, y, z \in \mathbb{Z}$.

d) Căutăm $e \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{Z}$. Legea este comutativă.

Din $x * e = x + e + xe = x \Rightarrow e(1+x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow e = 0$.

e) $a * \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} + 1 \geq 2 + 1 = 3$ deoarece $a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a \in \mathbb{N}^*$.

f) $x * x = 2x + x^2$ și ecuația devine $2x + x^2 = -1 \Rightarrow x = -1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $x\circ 1=9\Leftrightarrow 8x=8\Leftrightarrow x=1$.

b) $7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=7xy+x+y+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=7xy+x+y=x\circ y$.

c) $(x\circ y)\circ z=49\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)\left(z+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

d) $x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=0$.

e) Fie $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ se arată există $x'\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0$.

$\left(-\frac{1}{7}\right)\circ x=x\circ\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -\frac{1}{7}$ este nesimetrizabil.

f) $\left(-\frac{3}{7}\right)\circ\left(-\frac{2}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{7}\right)=\left(-\frac{3}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{7}\right)=-\frac{1}{7}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) Se observă că $x*y=(x+5)(y+5)-5, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} x*(-5)&=(x+5)(-5+5)-5=-5\\ (-5)*x&=(-5+5)(x+5)-5=-5\end{aligned}\right\}\Rightarrow x*(-5)*x=-5, \forall x\in\mathbb{R}$$

b) $$\left.\begin{aligned} x\in(-5,+\infty)&\Rightarrow x+5>0\\ y\in(-5,+\infty)&\Rightarrow y+5>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (x+5)(y+5)-5>-5\Rightarrow x*y\in(-5,+\infty).$$

c) $x*x'=x'*x=-4\Leftrightarrow x'=-5+\dfrac{1}{x+5}\in(-5,+\infty)$.

d) $x*(-5)=(-5)*x=-5, (\forall)x\in\mathbb{R}$. Deci $E=\dfrac{-6}{-2}=3$.

e) $(\log_2 x)*(\log_3 x)=-5\Rightarrow(\log_2 x+5)(\log_3 x+5)=0$. Deci $x_1=\dfrac{1}{32}$, $x_2=\dfrac{1}{243}$.

f) $x*(-5)*x=-5, (\forall)x\in\mathbb{R}$, deci $(-6)*\big[(-5)*2009\big]=(-6)*(-5)=-5$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}}=\frac{5}{7}$.

b) $(x*y)*z=\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z=\frac{(x+y+z)+xyz}{1+xy+xz+yz}=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in M$.

c) $x*e=\frac{x+e}{1+x\cdot e}=x=e*x,\ \forall x\in[0,\infty)\Rightarrow e=0\in M$ este element neutru.

d) $x'*x=x*x'=0\Leftrightarrow\frac{x+x'}{1+xx'}=0\Rightarrow x+x'=0\Rightarrow x'=-x$. Deci $x'\in[0,\infty)\Leftrightarrow -x\in[0,\infty)\Leftrightarrow x\in(-\infty,0]$ dar $x\in[0,\infty)$, deci $x=0$ este singurul element simetrizabil.

e) $\frac{1}{x}*\frac{1}{y}=\frac{\frac{x+y}{xy}}{\frac{xy+1}{xy}}=\frac{x+y}{xy+1}=x*y,\ \forall x,y\in(0,+\infty)$.

f) Din punctul **e)** avem că: $\left.\begin{array}{l}1*\frac{1}{2}=1*2\\ \frac{1}{3}*\frac{1}{4}=3*4\\ \ldots\\ \frac{1}{7}*\frac{1}{8}=7*8\end{array}\right\}\Rightarrow E=1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\left.\begin{array}{l} x\in M\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow 2^x\geq 1 \\ y\in M\Rightarrow y\geq 0\Rightarrow 2^y\geq 1 \end{array}\right\}\Rightarrow \log_2\left(2^x+2^y-1\right)\geq \log_2 1=0$.

b) $0*x=x+1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+2\right)=+1\Leftrightarrow 2^x+2=2^x\cdot 2\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

c) $x*e=e*x=x\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+2^e+1\right)=x\Leftrightarrow 2^x+2^e+1=2^x\Leftrightarrow 2^e=-1$, imposibil, deci nu există element neutru.

d) $(x*x)*x=\left(\log_2\left(2\cdot 2^x+1\right)\right)*x=\log_2\left(2\cdot 2^x+1+2^x+1\right)=\log_2\left(3\cdot 2^x+2\right)$.

e) $x*(-x)=\log_2\left(2^x+2^{-x}+1\right)\geq 1\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}-1\geq 2\Leftrightarrow 2^x+\dfrac{1}{2^x}\geq 3$, adevărat pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

f) $3*4=\log_2 25$; $1*2=\log_2 7$. Dar $2^{1*2}+2^{3*4}=2^{\log_2 7}+2^{\log_2 25}=7+25=32$.

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $a*a=\sqrt{a^2+a^2-a^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a$ pentru $a>0\Rightarrow a*a-a=0$.

b) $\left.\begin{array}{l}x\geq a\geq 0\Rightarrow x^2\geq a^2\\ y\geq a\geq 0\Rightarrow y^2\geq a^2\end{array}\right\}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2-a^2}\geq\sqrt{a^2}=|a|=a$. Deci $x*y\geq a$.

c) $(x*y)*z=\left(\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)*z=\sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)^2+z^2-a^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2a^2}=$

$=(x*y)*z,\forall x,y,z\in G$.

d) $x*a=\sqrt{x^2+a^2-a^2}=\sqrt{x^2}=x,\forall x\geq a\geq 0$.

Analog $a*x=x$, deci legea „$*$” admite elementul neutru $e=a\in[a,+\infty)$.

e) Fie $x\in[a,+\infty),a\geq 0$. Căutăm $x'\in[a,+\infty)$ astfel ca $x*x'=x'*x=a$.

$x'*x=x*x'=\sqrt{x^2+x'^2-a^2}\Rightarrow x^2+x'^2-a^2=a^2\Rightarrow x'^2=2a^2-x^2$.

Dar $x'\geq a\geq 0\Rightarrow x'=\sqrt{2a^2-x^2}$. Din $x'\in[a,+\infty)\Rightarrow x'\geq a\geq 0\Rightarrow x'^2\geq a^2\Rightarrow 2a^2-x^2\geq a^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x^2\leq a^2\\ x\geq a\\ a\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow x\leq a$ şi $x\geq a\Rightarrow x=a$. Singurul element simetrizabil este elementul neutru a.

f) $(2x)*a=a*(x+a)\Leftrightarrow\sqrt{(2x)^2}=\sqrt{(x+a)^2}\Leftrightarrow(2x)^2=(x+a)^2\Leftrightarrow x-a=0$ sau

$3x+a=0\Rightarrow x_1=a,\ x_2=-\frac{a}{3}\notin G\Rightarrow x=a$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)*\frac{\sqrt{2}}{2}=0\in G$.

b) $x*x^2=0\Leftrightarrow\frac{x+x^2}{1+x^3}=0\Leftrightarrow x(1+x)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-1\notin G\Rightarrow x=0$.

c) $-1<x<1\Rightarrow x+1>0,\ x-1<0;\ -1<y<1\Rightarrow y+1>0,\ y-1<0$. Deci

$(x+1)(y+1)>0\Leftrightarrow xy+x+y+1>0\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy+1}>-1$. $(x-1)(y-1)<0\Leftrightarrow xy-x-y+1>0\Leftrightarrow\frac{x+y}{xy+1}<1$.

d) $(x*y)*z=\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)*z=\frac{x+y+z+xyz}{1+xz+yz+xy}=x*(y*z),\forall x,y,z\in G$.

e) $x*0=x=0*x,\forall x\in G\Rightarrow 0$ element neutru.

f) $x*(-x)=0,\forall x\in G\Rightarrow\forall x\in G,\exists x'=-x\in G$ astfel ca $x*x'=x'*x=0$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\left.\begin{array}{l} x*y=axy-ab(x+y)+ab^2+b \\ x*y=2xy-2\cdot 3(x+y)+2\cdot 3^2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2; b=3 \Rightarrow x*y=2(x-3)(y-3)+3,\ \forall x,y\in A.$

b) $\left.\begin{array}{l} x\in A\setminus\{3\}\Rightarrow x-3>0 \\ y\in A\setminus\{3\}\Rightarrow y-3>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-3)(y-3)>0 \Rightarrow 2(x-3)(y-3)+3>3 \Rightarrow x*y\in A\setminus\{3\}.$

c) $\left.\begin{array}{l} x*c=c*x=c,\ \forall x\in A \\ x*c=2(x-3)(c-3)+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(x-3)(c-3)=c-3,\ \forall x\in A\Rightarrow c=3.$

d) Din **b)** rezultă că "$*$" este lege de compoziție pe $A\setminus\{3\}$.

$(x*y)*z=2^2(x-3)(y-3)(z-3)+3=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in A\setminus\{3\}$ (asociativitatea).

$x*y=2(x-3)(y-3)+3=2(y-3)(x-3)+3=y*x,\ \forall x,y\in A\setminus\{3\}$ (comutativitatea).

Fie $e\in A\setminus\{3\}$ astfel ca $x*e=e*x=x,\ \forall x\in A\setminus\{3\} \Rightarrow 2(x-3)(e-3)+3=x,\ \forall x\in A\setminus\{3\}$

$\Rightarrow e=\frac{7}{2}$ element neutru. Pentru $x\in A\setminus\{3\}$, căutăm $x'\in A\setminus\{3\}$ astfel ca $x*x'=x'*x=\frac{7}{2}$.

– $x'-2(x-3)(x'-3)=3 \Rightarrow \frac{7}{2} \Rightarrow x'=3+\frac{1}{4(x-3)},\ \forall x\in A\setminus\{3\}.\ x>3\Rightarrow 3+\frac{1}{4(x-3)}>3\Rightarrow x'\in A\setminus\{3\}.$

Deci $\forall x\in A\setminus\{3\}$, există $x'\in A\setminus\{3\}$.

e) $\left(\log_3 x^3\right)*\left(\log_9 x^6\right)=3 \Leftrightarrow 2\left(\log_3 x^3-3\right)\left(\log_9 x^6-3\right)=0 \Rightarrow \log_3 x=1$ sau $\log_9 x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=3.$

f) Cum $x*3=3$ și $3*x=3,\ \forall x\in A$ și $\log_3 27=3\Rightarrow$

$\Rightarrow\left[(\log_3 27)*(\log_3 81)\right]*\left[(\log_3 243)*(\log_3 729)\right]=3.$

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x>1, y>1 \Rightarrow \log_2 x>0,\ \log_2 y>0 \Rightarrow 1+\log_2 x+\log_2 y>1 \Rightarrow x\circ y\in G$.

b) $a=\left(2^2\circ 2^3\right)\circ 2^4=(1+2+3)\circ 2^4=6\circ 2^4=5+\log_2 6$, $b=2^2\circ\left(2^3\circ 2^4\right)=2^2\circ 8=6$. Dar $\log_2 6>1\Rightarrow a>b$.

c) $\left(2^2\circ 2^3\right)\circ 2^4\neq 2^2\circ\left(2^3\circ 2^4\right)\Rightarrow$ legea nu este asociativă.

d) $2^x\circ 2^y=1+\log_2 2^x+\log_2 2^y=1+x+y,\ \forall x,y\in G$.

e) $2^x\circ 8^x=2^x\circ 2^{3x}=4x+1$. Ecuația devine $4x+1=9\Rightarrow x=2$.

f) $S=(1+2+1)+(3+4+1)+\ldots+(11+12+1)=(1+2+\ldots+12)+6=84$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Rezolvare

a) $\lg x = t \Rightarrow x = 10^t \Rightarrow x^{\lg y} = 10^{t\lg y} = 10^{\lg x \lg y}$.

b) $(2\circ 10)\circ 3 = \left(10^{\lg 2}\right)\circ 3 = 2\circ 3$, $2\circ(10\circ 3) = 2\circ\left(10^{\lg 3}\right) = 2\circ 3$.

c) $x\circ(yz) = 10^{\lg x \lg yz}$. $(x\circ y)(x\circ z) = 10^{\lg x\lg y}\cdot 10^{\lg x\lg z} = 10^{\lg x(\lg y+\lg z)} = 10^{\lg x\lg yz}$..

d) $x\circ 1 = 10^{\lg x\lg 1} = 10^0 = 1\circ x, \forall x\in A$.

e) Conform punctului **d)** $\left(\frac{1}{3}\circ\frac{1}{2}\right)\circ(1\circ 2) = 1$.

f) $(x\circ 10)\left(x^2\circ 10\right) = x^3$. Ecuația devine $x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării

Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $(1\circ 2)\circ(3\circ 4)=5\circ 9=16$.

b) $(x\circ y)\circ z=(x+y+2)\circ z=x+y+z+4=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) $x\circ(-2)=x+(-2)+2=x=(-2)\circ x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=-2$ element neutru.

d) $\forall x\in\mathbb{R},\exists x'=-4-x\in\mathbb{R}$ astfel ca $x\circ x'=-2$.

e) $x\circ x=4x^2\Rightarrow 2x+2=4x^2\Rightarrow S=\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$.

f) $\left.\begin{array}{l} x\circ\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}+2 \\ x\circ x=2x+2 \end{array}\right\}\Rightarrow x=\frac{1}{x}\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1.$

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării

Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $x*x=x^2+2x=(x+1)^2-1\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $(x*y)*z=(x+1)(y+1)(z+1)-1=x*(y*z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) $x*0=x=0*x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $e=0$ element neutru.

d) Legea "$*$" este asociativă, comutativă şi $e=0$ este element neutru.

$x*x'=x'*x=e\Leftrightarrow x'(1+x)=-x\Rightarrow x'=-\dfrac{x}{1+x}$, $\forall x\neq -1\Rightarrow$ pentru $a=-1$ $(\mathbb{R}\setminus\{-1\},*)$ este grup comutativ.

e) $x*(1*x)=x*(2x+1)=2(x+1)^2-1$. Ecuația devine $2(x+1)^2=2\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2$.

f) $\begin{cases}(x+1)(2+1)-1=y\\(y+1)(3+1)-1=x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=-2\\x-4y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării

Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\frac{(x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)}{(x+2)(y+2)+(x-2)(y-2)}=\frac{xy+2x+2y+4-xy+2x+2y-4}{xy+2x+2y+4+xy-2x-2y+4}=\frac{4x+4y}{2xy+8}=\frac{2x+2y}{xy+4}=$

$=\frac{1}{2}(x*y),\forall x,y\in G$.

b) $x*(-x)=\frac{4x-4x}{4-x^2}=0,\forall x\in G$.

c) $e*x=x*e=x,\ \forall x\in(-2,2)\Leftrightarrow e=0$.

d) $(x*y)*z=\frac{4x+4y+4z+xyz}{4+xy+xz+yz}=x*(y*z),\forall x,y,z\in G$.

e) Fie $x\in G$. Căutăm $x'\in G$ astfel ca $x*x'=x'*x=0$. Dar $x*x'=\frac{x+x'}{1+\frac{xx'}{4}}\Rightarrow x'=-x\in G$.

f) Se demonstrează că $x*y=y*x,\forall x,y\in G$. Deci „$*$” este asociativă şi comutativă pe G şi $x*(-x)=0,\forall x\in G$. $x*0=0*x=x,\forall x\in G$.

$$\left(\frac{1}{8}\right)*\left(\frac{1}{7}\right)*\ldots*1*(-1)*\left(\frac{-1}{2}\right)*\ldots*\left(-\frac{1}{7}\right)*\left(-\frac{1}{8}\right)=\underbrace{\left[\left(\frac{1}{8}\right)*\left(\frac{-1}{8}\right)\right]}_{0}*\underbrace{\left[\left(\frac{1}{7}\right)*\left(\frac{-1}{7}\right)\right]}_{0}*\ldots*\underbrace{[1*(-1)]}_{0}=0.$$

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării

Centrul Naţional pentru Curriculum şi Evaluare în Învăţământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $\frac{(x-1)(y-1)}{2}+1=\frac{xy-x-y+1+2}{2}=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)=x\circ y,\forall x,y\in A$.

b) $\left.\begin{array}{l} x\circ(y*z)=x\circ(y+z-1)=\frac{(x-1)(y+z-1-1)}{2}+1=\frac{(x-1)(y+z-2)}{2}+1 \\ (x\circ y)*(x\circ z)=\frac{(x-1)(y-1)}{2}+1+\frac{(x-1)(z-1)}{2}+1-1=\frac{(x-1)(y+z-2)}{2}+1 \end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z),\forall x,y,z\in A$.

c) $x\circ 1=\frac{(x-1)(1-1)}{2}+1=x=\frac{(1-1)(x-1)}{2}+1=1\circ x,\forall x\in A\Rightarrow x\circ 1\circ x=1\circ x=x,\forall x\in A$.

d) Fie $x\in A\Rightarrow x=2k+1,k\in\mathbb{Z}$. Căutăm $x'\in A,x'=2k'+1,k'\in\mathbb{Z}$ astfel ca $x*x'=x'*x=3$.

$2kk'+1=3\Rightarrow kk'=1\Rightarrow k'=\frac{1}{k},k\in\mathbb{Z}^*$. Dar $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{1}{k}\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\,|\,1\Rightarrow k\in\{\pm 1\}$. $x_1=3,x_2=-1$.

e) $(x\circ x)\circ(x\circ x)=\frac{(x-1)^4}{8}+1\Rightarrow$ ecuația devine $(x-1)^4=0\Rightarrow x=1$.

f) Conform punctului **c)** $\Rightarrow x\circ 1=1\circ x=x\circ 1\circ x=1,\forall x\in A$. Deci $\left[(-3)\circ(-1)\right]\circ 1=1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Rezolvare

a) $(2x-1)\perp x^2=2x-1+x^2+1=x+x+x^2=x\circ x,\forall x\in\mathbb{Z}$.

b) $(x\circ y)\circ z=(x+1)(y+1)(z+1)-1=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in\mathbb{Z}$.

c) $x\circ(-1)=(x+1)(-1+1)-1=-1=(-1)\circ x,\forall x\in\mathbb{Z}$.

d) $2^x\perp 2^{x+1}=2^x+2^{x+1}+1;\ 3\circ 1=7\Rightarrow$ ecuația devine $2^x\cdot 3=6\Rightarrow x=1$.

e) $\left.\begin{array}{l}3\perp\log_2 x=4+\log_2 x\\ 2\circ\log_2 x=3(\log_2 x+1)-1\end{array}\right\}\Rightarrow x=2$.

f) $1-2^1=-1$ și $x\circ(-1)\circ x=-1,\forall x\in\mathbb{Z}\Rightarrow a=-1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=4xy-2x-2y+\frac{3}{2}=4xy-2x-2y+1+\frac{1}{2}=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$.

b) Pentru $x,y,z\in\mathbb{R}$ se demonstrează că $(x*y)*z=x*(y*z)=16xyz-8(xz+yz+xy)+4(x+y+z)-\frac{3}{2}$.

c) $\exists e\in\mathbb{R}$, astfel încât $e*x=x*e=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Prin calcule se găsește $e=\frac{3}{4}$.

d) $x^2*3=0\Rightarrow 12x^2-2x^2-6+\frac{3}{2}=0\Rightarrow x^2=\frac{9}{20}\Rightarrow x_1=\frac{3\sqrt{5}}{10}$, $x_2=-\frac{3\sqrt{5}}{10}$, nu convine.

e) $x*x=\frac{1}{2}\Rightarrow 4x^2-4x+1=0\Rightarrow(2x-1)^2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\in\mathbb{Q}$.

f) $\left(2^x\right)*\left(2^{2x}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow 4\cdot 2^{3x}-2\cdot 2^x-2\cdot 2^{2x}+1=0$, iar cu substituția $2^x=y$, $y>0$ rezultă

$4y^3-2y^2-2y+1=0\Rightarrow(2y-1)\left(2y^2-1\right)=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-1, y^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Prin calcul se obține rezultatul $\frac{23}{10}$.

b) $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow x-\frac{1}{2}>0$ și $y\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)\Rightarrow y-\frac{1}{2}>0\Rightarrow 4xy-2x-2y+1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\Rightarrow x*y>\frac{1}{2}\Rightarrow x*y\in H$.

c) Pentru oricare $x,y,z\in\mathbb{R}$ are loc $(x*y)*z=x*(y*z)=16xyz-8(xz+yz+xy)+4(x+y+z)-\frac{3}{2}$.

d) $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$ și prin calcul se obține $e=\frac{3}{4}$.

e) $\left(2^x\right)*\left(4^x\right)=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\cdot 2^x\left(2\cdot 2^{2x}-2^x-1\right)=0;\ 2^x=y,\ y>0\Rightarrow 2y^2-y-1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow y=1\Rightarrow x=0;\ y=-\frac{1}{2},$ nu convine.

f) $x*a=a*x=a,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 4xa-2x-2a+\frac{3}{2}=a,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 2x(2a-1)-\frac{3}{2}(2a-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left(2x-\frac{3}{2}\right)(2a-1)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=-xy+5x+5y-20=-xy+5x+5y-25+5=(x-5)(5-y)+5$.

b) $x\in(-\infty,5)$ și $y\in(-\infty,5)\Rightarrow(x-5)(y-5)>0\Rightarrow -xy+5x+5y-25<0\Rightarrow x*y\in G$.

c) Pentru $x,y,z\in\mathbb{R}$ se demonstrează că $(x*y)*z=x*(y*z)=xyz-5(xy+yz+xz)+25(x+y+z)-120$.

d) Prin calcul direct. Rezultă 4 este element neutru.

e) $E(x)=-(x+8)(x-7)+5(x+8)+5(x-7)-20-63=-x^2+9x-22$.

$\Delta=-7\Rightarrow x_{1,2}\notin\mathbb{R}$ Se ține cont de semnul funcției de gradul al doilea $\Rightarrow E(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

f) Din **c)** și din **d)** rezultă că legea este asociativă și are element neutru. $x'=\dfrac{5x-24}{x-5}=5+\dfrac{1}{x-5}\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Pentru $x, y, z \in \mathbb{Z}$ se demonstrează că $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z) = xyz + 2(xy + yz + xz) + 4(x + y + z) + 6$.

b) $\exists e \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x\Delta e = e\Delta x = x,\ \forall x \in \mathbb{Z}$. Prin calcul se găsește $e = -1 \in \mathbb{Z}$.

c) $x\Delta(-3) = -1 \Rightarrow -x - 4 = -1 \Rightarrow x = -3$

d) $x\Delta(y \perp z) = (x\Delta y) \perp (x\Delta z) = xy + xz + 4x + 2y + 2z + 6$.

e) $(x \perp x) \perp (x \perp x) = -x^2 + 2 \Rightarrow 4x + 4 = -x^2 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \in \mathbb{Z}$.

f) Prin calcul direct $\left(2 \perp 2^2\right) \perp \left(2^3 \perp 2^4\right) = \left(2 + 2^2 + 2\right) \perp \left(2^3 + 2^4 + 2\right) = 8 \perp 26 = 36$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=xy+x+y+1-1=x(y+1)+(y+1)-1=(x+1)(y+1)-1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Se aplică proprietatea $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

$e*x=x*e=xe+x+e=x\Rightarrow e(x+1)=0\Rightarrow e=0$.

c) Pentru $x,y,z\in\mathbb{R}$ se demonstrează că $x*(y*z)=(x*y)*z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$.

d) $x*x=-1\Rightarrow(x+1)^2-1=-1\Rightarrow(x+1)=0\Rightarrow x=-1$.

e) $(\log_2 x)*(\log_{\frac{1}{2}} x)=-1\Leftrightarrow(\log_2 x+1)\left(\log_{\frac{1}{2}} x+1\right)=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$ și $x_2=2$.

f) $2\frac{(n-1)n}{2}+2+\frac{(n-1)n}{2}=11$, $n^2-n-6=0\Rightarrow n_1=3$ și $n_2=-2$ care nu convine, deci $n=3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ se demonstrează că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = x + y + z + 2\sqrt{5}$.

b) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0 \in \mathbb{Z}$.

c) $e = -\sqrt{5}$.

d) $x^3 - x + \sqrt{5} = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$.

e) $f(x) \circ f(y) = f(x) + f(y) + \sqrt{5} = \ln x - \sqrt{5} + \ln y - \sqrt{5} + \sqrt{5} = \ln xy - \sqrt{5} = f(xy)$.

f) $x \circ x' = x' \circ x = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x + x' + \sqrt{5} = -\sqrt{5} \Leftrightarrow x' = -x - 2\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$ se demonstrează că $x \perp (y \perp z) = (x \perp y) \perp z = x + y + z - 2$.

b) $2^x \perp 4^x = 5 \Rightarrow 2^{2x} + 2^x - 6 = 0$, dar $2^x = y,\ y > 0$; $y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow y_1 = 2 \Rightarrow x = 1,\ y_2 = -3$ nu convine.

c) $x \perp x^2 \le 1 \Rightarrow x + x^2 - 1 \le 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 \le 0$. Din tabloul de valori se obține $x \in [-2,1]$.

d) $1 \perp n \perp \frac{n(n-1)}{2} = 44 + n \Rightarrow n_1 = 10 \in \mathbb{N}$ și $n_2 = -9 \notin \mathbb{N}$.

e) $f(x \perp y) = 2(x \perp y) - 1 = 2(x + y - 1) - 1 = 2x + 2y - 3 = (2x - 1) \perp (2y - 1) = f(x) \perp f(y)$.

f) $2 \perp 2^2 \perp \cdots \perp 2^6 = (2 \perp 2^2 \perp 2^3) \perp (2^4 \perp 2^5 \perp 2^6) = (2 + 2^2 + 2^3 - 2) \perp (2^4 + 2^5 + 2^6 - 2) = 121$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării

Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Pentru $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x\perp(y\perp z)=(x\perp y)\perp z=x+y+z-2$.

b) Fie $a=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ a. î. $\frac{1}{3}*b=0(\in\mathbb{Q})$ și prin calcule se obține $b=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

c) $((x*y)*z)*t=((x+y-1)*z)*t=(x+y+z-2)*t=x+y+z+t-3$.

d) $p=(1*2*3*4)*(5*6*7*8)=(1+2+3+4-3)*(5+6+7+8-3)=7*23=29$.

e) $\begin{cases}(2x+5)*(3y-1)=1\\(x-7)*(2y+3)=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-2\\x+2y=3\end{cases}$. Deci $S=\{(-13,8)\}$.

f) $f(x*y)=3(x*y)-2=3(x+y-1)-2=3x+3y-5=(3x-2)*(3y-2)=f(x)*f(y)$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x * y = -xy - x - y - 2 = -xy - x - y - 1 - 1 = -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1.$

b) Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x * (y * z) = (x * y) * z = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$.

c) $-xe - x - e - 2 = x \Rightarrow -e(x+1) = 2(x+1),\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = -2$.

d) $x * x' = x' * x = e \Rightarrow\ -xx' - x - x' - 2 = -2 \Rightarrow x' = \dfrac{-x}{x+1},\ x \neq -1.$

e) $(x+2) * (2x-3) = 5 \Leftrightarrow -(x+2)(2x-3) - (x+2) - (2x-3) - 2 = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow -2x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ și $x_2 = -2$.

f) $(x-3) * (x+1) \geq 0 \Rightarrow -(x-3)(x+1) - (x-3) - (x+1) - 2 \geq 0;\ -x^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 0.$

Folosind semnul funcției de gradul doi, soluția inecuației este $S = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=3xy+6x+6y+12-2=3x(y+2)+6(y+2)-2=3(x+2)(y+2)-2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

b) Legea de compoziție este asociativă pe $\mathbb{R}$ dacă $x*(y*z)=(x*y)*z\quad\forall x,y,z\in\mathbb{R}$

$x*(y*z)=(x*y)*z=9xyz+18(xy+yz+xz)+36(x+y+z)+70$.

c) $x\in M\Rightarrow x+2\geq 0$ și $y\in M\Rightarrow y+2\geq 0\Rightarrow (x+2)(y+2)\geq 0$.

$xy+2x+2y+4\geq 0\Rightarrow 3xy+6x+6y+12\geq 0\Rightarrow 3xy+6x+6y+10\geq -2\Rightarrow x*y\geq -2\Rightarrow x*y\in M$.

d) Aplicând proprietatea: $\exists e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$ se obține $e=-\frac{5}{3}$.

e) $a=x*\frac{x}{3}=x^2+8x+10$ și $b=\frac{x}{2}*x=\frac{3x^2+18x+20}{2}$.

$a+b=20\Rightarrow x^2+8x+10+\frac{3x^2+18x+20}{2}=20\ \Rightarrow x(5x+34)=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=-\frac{34}{5}$.

f) $3^x*3^{x-1}=19\Rightarrow 3^{2x}+8\cdot 3^x-9=0$. Se face substituția $3^x=y,\ y>0\ \Rightarrow y^2+8y-9=0$.

$\Delta=100\Rightarrow y_1=1\Rightarrow 3^x=1\Rightarrow x=0;\ y_2=-9\notin(0,+\infty)$.

Subiectul II

Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Asociativitatea: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ avem $(x*y)*z=x*(y*z)$; $(x*y)*z=x*(y*z)=x+y+z-2\cdot 7$.

b) $x\circ(y*z)=x\circ(y+z-7)=xy+xz-14x-7y-7z+105$;

$(x\circ y)*(x\circ z)=xy-7x-7y+56+xz-7x-7z+56-7=xy+xz-14x-7y-7z+105.$

c) $7^x*7^{x+1}*7^{x-1}=43\Rightarrow 7^x\left(1+7+\frac{1}{7}\right)=57\Rightarrow x=1$.

d) $\left.\begin{matrix}x\in H\\ y\in H\end{matrix}\right\}\Rightarrow(x-7)(y-7)>0\Rightarrow xy-7x-7y+49>0\Rightarrow xy-7x-7y+56>7\Rightarrow x\circ y\in H$.

e) $(x-1)\circ x<7\Rightarrow x^2-15x+56<0\Rightarrow x\in(7,8)$.

f) $1*2*3*\cdots*9=(1*2*3)*(4*5*6)*(7*8*9)=-11$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $x*(y*z)=(x*y)*z=x+y+z-12,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) $x*6=x+6-6=x=6+x-6=6*x,\forall x\in\mathbb{R}$.

c) x'este simetricul lui (-7) în raport cu legea „$*$” dacă $x'\in\mathbb{R}$, și $x'*(-7)=(-7)*x'=6\Rightarrow x'=19$.

d) $\left(x^2+3x-1\right)*\left(2x^2-x+6\right)\geq 0\Rightarrow 3x^2+2x-1\geq 0\Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right)$.

e) $a=2x^2\quad b=\frac{3x-12}{2}\quad c=-11x^2$. a,b,c - termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Rightarrow 2b=a+c$

$3x-12=2x^2-11x^2\Rightarrow 3x^2+x-4=0$. Rezolvând ecuația $3x^2+x-4=0\Rightarrow\Delta=49\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-\frac{4}{3}$.

f) Folosind **a).** $\frac{1}{2}*\frac{1}{2^2}*\cdots*\frac{1}{2^7}=\left(\frac{1}{2}*\frac{1}{2^2}*\frac{1}{2^3}\right)*\left(\frac{1}{2^4}*\frac{1}{2^5}*\frac{1}{2^6}\right)*\frac{1}{2^7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^7}-6\cdot 6$.

Formula $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1},q\neq 1$ se aplică celor 7 termeni ai progresiei geometrice de rație $q=\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7-1\right]}{-\frac{1}{2}}-36=-\frac{1}{2^7}-35=-\left(\frac{1}{2^7}+35\right).$$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $2(x+5)(y+5)-5=2xy+10x+10y+45=x\perp y$.

b) $(x\perp y)\perp z=2^2(x+5)(y+5)(z+5)-5=x\perp(y\perp z)$.

c) $x>-5,\ y>-5\Rightarrow(x+5)(y+5)>0\Rightarrow 2(x+5)(y+5)-5>0$.

d) $5^x\perp 3^x=2\left(5^x+5\right)\left(3^x+5\right)-5=-5+20\left(3^x+5\right)\Leftrightarrow 5^x+5=10\Leftrightarrow x=1.$

e) $(x+1)\perp(x-4)=2(x+6)(x+1)-5<-5\Leftrightarrow(x+6)(x+1)<0\Rightarrow x\in(-6,-1)..$

f) $x\perp x\perp x=2^2(x+5)^3-5=2^n(x+5)^3-5\Rightarrow n=2.$

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=2xy-6x-6y+21=2xy-6x-6y+18+3=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$.

b) $(x*y)*z=x*(y*z)=4xyz-12(xz+yz+xz)+36(x+y+z)-105,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) $x*e=e*x=x\Rightarrow 2xe-6x-6e+21=x\Rightarrow e=\frac{7}{2}$.

d) Din **b)** legea de compoziție este asociativă, din **c)** are element neutru $e=\frac{7}{2}$,

elementele simetrizabile sunt de forma $x'=\frac{12x-35}{4(x-3)}=3+\frac{1}{4(x-3)}$, $x\neq 3$; comutativitatea este ușor de verificat $\Rightarrow (\mathbb{R}\setminus\{3\},*)$ este grup comutativ.

e) $x,y\in G\Rightarrow\begin{cases}x-3>0\\y-3>0\end{cases}\Rightarrow 2xy-6x-6y+18>0\Rightarrow 2xy-6x-6y+21>3\Rightarrow x*y\in G$.

f) $x*x*x=4(x-3)^3+3=2^n(x-3)^3+3\Rightarrow n=2$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $x*y=3xy-6x-6y+12+2=3x(y-2)-6(y-2)+2=3(x-2)(y-2)+2$.

b) $(1*x)*3=3(1*x)\cdot 3-6(1*x)-6\cdot 3+14=9(-3x+8)-6(-3x+8)-4=-9x+20$.

$1*(x*3)=3(x*3)-6-6(x*3)+14=3(3x-4)-6(3x-4)+8=-3(3x-4)+8=-9x+20$.

c) Se arată că $\exists e\in\mathbb{R}$, astfel încât $e*x=x*e=x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. $x*e=e*x=x\Rightarrow 3ex-6e-6x+14=x\Rightarrow e=\frac{7}{3}$.

d) $x*x=3\Rightarrow 3x^2-12x+11=0$. Se rezolvă ecuația și $A=\left\{2-\frac{\sqrt{3}}{3},2+\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

e) Se folosește **a).** și se obține $3\left[\log_3\left(x^2-7\right)-2\right]+2=2\ \Rightarrow\ \log_3\left(x^2-7\right)=2\ \Rightarrow\ x=\pm 4$.

f) Se arată că pentru $x=3$, $\exists x'\in\mathbb{R}$ astfel încât $x'*3=3*x'=\frac{7}{3}\Rightarrow 9x'-18-6x'+14=\frac{7}{3}\Rightarrow x'=\frac{19}{9}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Se arată că $(x*y)*z = x*(y*z) = x+y+z-8$ pentru $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

b) $x \circ y - (x-4)(y-4) - 4 = xy - 4x - 4y + 20 - xy + 4x + 4y - 16 - 4 = 0$.

Rezultă că $x \circ y = (x-4)(y-4) - 4,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

c) Pentru $\forall x,y \in \mathbb{R}$ se arată că $x \circ y = y \circ x$. Operațiile de adunare și înmulțire pe $\mathbb{R}$ sunt comutative

$x \circ y = xy - 4(x+y) + 20 = yx - 4(y+x) + 20 = yx - 4y - 4x + 20 = y \circ x$.

d) $\exists e \in \mathbb{R}$ a. î. $e*x = x*e = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 4$. $\exists u \in \mathbb{R}$ a.î. $u \circ x = x \circ u = x,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow u = 5$.

Deci $\sqrt{u^2+e^2} = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$.

e) $2 \circ (x*3) = 2 \circ (x-1) = -2x+14,\ (2 \circ x)*(2 \circ 3) = (2x-4+2)*(6-20+20) =$

$= (-2x+12)*6 = -2x+14$.

f) Din **a)** $\Rightarrow 2*2*2*2*2*2*2*2 = (2*2*2)*(2*2*2)*2 = (-2)*(-2)*2 = -10$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $(x\circ y)\circ z = x\circ(y\circ z) = 4xyz+8(xy+xz+yz)+16(x+y+z)+30$.

b) $x\circ(y*z) = x\circ(y+z+2) = 2xy+2xz+8x+4y+4z+14$.

$(x\circ y)*(x\circ z) = (x\circ y)+(x\circ z)+2 = 2xy+2xz+8x+4y+4z+14$.

c) Se verifică dacă există $u\in\mathbb{Z}$ pentru care $u\circ x = x,\ \forall x\in\mathbb{Z}$.

$u\circ x = x \Leftrightarrow 2ux+4u+4x+6 = x$; se obține $u = \frac{-3}{2}\notin\mathbb{Z}$.

d) $x\circ y = -2 \Leftrightarrow 2xy+4x+4y+6 = -2 \Leftrightarrow 2(x+2)(y+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $y = -2$.

e) $x^2 * x \le 2 \Leftrightarrow x(x+1)\le 0 \Leftrightarrow x\in[-1,0]$ și $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{-1,0\}$.

f) $a = x*x = 2x+2$ și $b = x\circ x = 2x^2+8x+6$. Se înlocuiesc în: $\frac{a+b}{2} = -2$.

Se rezolvă ecuația $x^2+5x+4 = -2$ de unde se obține $x = -2$ sau $x = -3$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Fie $x\in H$ și $y\in H\Rightarrow\begin{cases}x+2\geq 0\\ y+2\geq 0\end{cases}\Rightarrow xy+2x+2y+4\geq 0\Rightarrow 2xy+4x+4y+8\geq 0\Rightarrow$

$2xy+4x+4y+6>-2$. Deci $x\circ y\geq -2\Rightarrow x\circ y\in H$.

b) $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)=4xyz+8(xz+yz+xy)+16(x+y+z)+30$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) Se demonstrează că $\exists e\in\mathbb{R}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ a. î. $e*x=x*e=x$ și se obține $e=-2$.

d) $x^2*3x=0\Rightarrow x^2+3x+2=0\Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-2\Rightarrow A=\{-1,-2\}$.

$x\circ x=0\Rightarrow 2x^2+8x+6=0\Rightarrow x_3=-1,\ x_4=-3\Rightarrow B=\{-1\}$, deci $A\cap B=\{-1\}$.

e) $(x*1)\circ 2=(x\circ 2)*(1\circ 2)=8x+38,\forall x\in\mathbb{R}$.

f) $a=2x+2$ și $b=2x^2+8x+6\ \Rightarrow\frac{a+b}{2}<0\Leftrightarrow x^2+5x+4<0\Rightarrow x\in(-4,-1)$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x \perp y = xy - x - y + 3 = xy - x - y + 1 + 2 = x(y-1) - (y-1) + 2 = (y-1)(x-1) + 2$.

b) $x \perp (y \perp z) = x(y \perp z) - x - (y \perp z) + 3 = x(yz - y - z + 3) - x - (yz - y - z + 3) + 3 =$

$= xyz - (xy + xz + yz) + 2x + y + z$

$(x \perp y) \perp z = (x \perp y)z - (x \perp y) - z + 3 = xyz - (xz + yz + xy) + x + y + 2z$.

Se observă că rezultatele sunt diferite, deci legea de compoziție nu este asociativă.

c) $\begin{cases} x \perp x = y \\ x \perp y = xy - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x \quad | \cdot 3 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 5 \\ y^2 - 9y + 18 = 0 \end{cases}$. Pentru $y^2 - 9y + 18 = 0$, $\Delta = 9$.

Deci $\begin{cases} y_1 = 6 \Rightarrow x_1 = -1 \\ y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-1,6);(2,3)\}$.

d) $[(2 \perp x) \perp 2] \perp x = 10 \Leftrightarrow [(2x - 2 - x + 3) \perp 2] \perp x = 10 \Leftrightarrow [(x+1) \perp 2] x = 10 \Leftrightarrow (x+2) \perp x = 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x = \pm 3$.

e) $x \perp x \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, adevărat $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) $x \perp y = (x-1)(y-1) + 2$. Alegem $x - 1 = \sqrt{5}$, $y - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow x = \sqrt{5} - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5}} + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

și $x \perp y = 3 \in \mathbb{Q}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Se verifică prin calcul direct.

b) $x, y \in M \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{1}{2}>0 \\ y-\frac{1}{2}>0 \end{cases} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)>0 \Rightarrow xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}>0 \Rightarrow x\circ y>\frac{1}{2} \Rightarrow x\circ y\in M$.

c) $x\circ(y\circ z)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=(x\circ y)\circ z \ \ \forall x, y, z\in M$.

d) $x*e=e*x=x \Leftrightarrow x\left(e-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(e-\frac{3}{2}\right), \forall x\in M$, deci $e=\frac{3}{2}$.

e) $x\circ 2\circ x=\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=1$ cu soluția $x=\frac{3}{2}\in M$.

f) $x\circ x=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=1\in M$. Deci $A=\{1\}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $x*y=2xy+2x+2y+1=2xy+2x+2y+2-1=(2x+2)(y+1)-1=2(x+1)(y+1)-1$.

b) $(x*y)*z=x*(y*z)=4xyz+4(xz+yz+xy)+4(x+y+z)+3,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) $x*e=e*x=x\Leftrightarrow 2ex+2e+2x+1=x\Leftrightarrow 2e(x+1)=-(x+1),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=\dfrac{-1}{2}\in\mathbb{R}$.

d) $x*y=-1\Leftrightarrow 2(x+1)(y+1)-1=-1\Rightarrow\ 2(x+1)(y+1)=0\Rightarrow\ x=-1$ sau $y=-1$.

e) Se rezolvă ecuația $x*x=1\Leftrightarrow 2x(x+2)=0\Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2\Rightarrow x_1^3+x_2^3=-8$.

f) $x*y=2xy+2(x+y)(y+1)-1\neq -1,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\Rightarrow$ operația "$*$" este lege de compoziție pe $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Din **b)** $\Rightarrow$ legea este asociativă. Din **c)** $\Rightarrow e=-\dfrac{1}{2}$ element neutru.

$x*x'=e\Leftrightarrow 2xx'+2x+2x'+1=\dfrac{-1}{2}\Leftrightarrow 2x'(x+1)=\dfrac{-(3+4x)}{2}$

$\Leftrightarrow x'=\dfrac{-(3+4x)}{4(x+1)}\neq -1\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ x'\in\mathbb{R}$.

$x*y=2xy+2(x+y)+1=2yx+2(y+x)+1=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$ legea este comutativă.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) $(5*2)-(3*2)=(5+2a-b)-(3+2a-b)=2$.

b) $x*y=y*x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+ay-b=y+ax-b,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\Leftrightarrow (x-y)(1-a)=0,\ \forall x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow a=1.$

c) $a=1\Rightarrow x*y=x+y-b$. $e=2009\Leftrightarrow x*2009=2009*x=x,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+2009-b=x\Rightarrow b=2009$

d) $a=1\Rightarrow x*y=x+y-b$. $(x*y)*z=x+y+z-2b=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

e) $x*x=-b,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x+ax-b=-b,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x(1+a)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow a=-1.$

f) $x*x'=x'*x=e$. Din punctul **c)** rezultă că $e=2009$, iar din **b)** rezultă că legea este comutativă $\Rightarrow x*x'=2009\Leftrightarrow x+x'-2009=2009\Leftrightarrow x'=4018-x\in\mathbb{R}$. Deci pentru orice $x\in\mathbb{R}$ există $x'=4018-x\in\mathbb{R}$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

a) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$, $x*(y*z)=(x*y)*z\Leftrightarrow ax+b(y*z)-1=a(x*y)+bz-1$.

$ax+aby+b^2z-b-1=a^2x+aby+bz-a-1,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$(a-a^2)x+(b^2-b)z-b+a=0,\forall x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}a-a^2=0\\ b^2-b=0;\ a=b=0 \text{ nu convine,}\\ a-b=0\end{cases}$$

deci $a=b=1\Rightarrow x*y=x+y-1$.

b) Se demonstrează că $\forall x,y\in\mathbb{R}$ avem $x\circ y \quad y \quad x$.

$x\circ y=2xy-2x-2y+3=2xy-2(x+y)+3=2yx-2(y+x)+3=y\circ x$.

c) Se determină elementul neutru pentru legea „$*$”. $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Din $e*x=x*e=x\Rightarrow x+e-1=x\Rightarrow e=1\in\mathbb{R}$.

Deci x' simetricul lui $x\Rightarrow x*x'=1\Rightarrow x+x'-1=1\Rightarrow x'=2-x\in\mathbb{R}$.

Deci $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists x'=2-x\in\mathbb{R}$ simetricul lui x în raport cu legea „$*$”.

d) Căutăm $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $e\circ x=x\circ e=x,\forall x\in\mathbb{R}$.

$$x\circ e=e\circ x=x\Rightarrow 2ex-2e-2x+3=x\Rightarrow 2e(x-1)=3(x-1),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e=\frac{3}{2}\in\mathbb{R}.$$

e) $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)=2xy+2xz-4x-2y-2z+5$.

f) $f(xy)=\frac{1}{2}xy+1$; $f(x)\circ f(y)=2\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}y+1\right)-2\left(\frac{1}{2}x+1\right)-2\left(\frac{1}{2}y+1\right)+3=\frac{1}{2}xy+1$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $(x*x)+(x\circ x)=0 \Leftrightarrow 2x+1+x^2-1=0 \Leftrightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=-2$.

b) Din $x\circ(-1)=(-1)\circ x=x,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow e=-1$.

c) $x,y\in H \Rightarrow x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ y=2p+1,\ p\in\mathbb{Z}.\ x*x=2k+1+2p+1+1=2(k+p+1)+1\in H$.

d) $x,y\in H \Rightarrow x=2k+1,\ k\in\mathbb{Z},\ y=2p+1,\ p\in\mathbb{Z}.\ x\circ y=4kp+2k+2p+1-1=2(2kp+k+p)\notin H \Rightarrow$ operația „$\circ$” nu este lege de compoziție pe H.

e) $(x*y)*z=x+y+z+2=x*(y*z),\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

f) Din punctul **c)** rezultă că operația „$*$” este lege de compoziție pe H. Din punctul **e)** rezultă asociativitatea. Din **b)** avem $e=-1\in H$ este element neutru. Fie $x\in H$. Căutăm $x'\in H$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$.
$x'*x=x*x'=-1\Leftrightarrow x+x'+1=-1\Leftrightarrow x'=-2-x\in H$ pentru orice $x\in H$.

Subiectul II

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

a) $x*(-x)=-x^2+x-x=-x^2<0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $(x*y)*z=x*(y*z)=xyz+xz+yz+xy+x+y+z,\ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

c) $e\in\mathbb{R}$ este elementul neutru $\Leftrightarrow x*e=e*x=x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Din $e*x=x*e=x$ se găsește $e=0$.

d) $\begin{cases}x*y=1+xy\\ x*x=y-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+x+y=1+xy\\ x^2+2x=y-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x^2+2x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-x\\ x^2+3x=0\end{cases}\Rightarrow S=\{(0,1),(-3,4)\}$.

e) Din $x*x'=x'*x=e$ se obține $x'=\dfrac{-x}{x+1}\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

f) Din punctul **e)** avem $x'(x+1)=x$. Pentru $x=-1\Rightarrow 0=-1$, fals $\Rightarrow x=-1$ nu este element simetrizabil în raport cu legea $"*"\Rightarrow(\mathbb{R},*)$ nu este grup.