

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} a^2 & a & -1 \\ b^2 & b & -1 \\ c^2 & c & -1 \end{vmatrix} =$ $= (b-a)(c-b)(c-a)$	2p 3p
b)	$d_x = (b-a)(c-b)(c-a)(a+b+c)$ $d_y = -(b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ac)$ $d_z = -abc(b-a)(c-b)(c-a)$ $\Rightarrow x = a+b+c, y = -(ab+bc+ac), z = -abc$	3p 2p
c)	<p>Fie t_1, t_2, t_3 rădăcinile ecuației date</p> $\text{Fie } \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = x = a+b+c \\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -y = ab+bc+ac \\ t_1 t_2 t_3 = -z = abc \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = a \\ t_2 = b \\ t_3 = c \end{cases}$	1p 2p 2p
2. a)	<p>Suma coeficienților polinomului f este egală cu $f(1)$</p> $f(1) = 7^{2012} + 14 \Leftrightarrow$ $f(1) = 7(7^{2011} + 2) : 7$	2p 1p 2p
b)	$g = (x+2)(x+3)$ $f = (x+2)(x+3) \cdot q + r, \text{ grad } r < 2 \Rightarrow r = ax + b$ $\left. \begin{aligned} f(-2) &= 1^{2012} - 8 + 10 = 3 \\ f(-2) &= -2a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2a + b = 3; \quad \left. \begin{aligned} f(-3) &= (-1)^{2012} - 12 + 10 = -1 \\ f(-3) &= -3a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -3a + b = -1$ $\begin{cases} -2a + b = 3 \\ -3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 11 \end{cases} \Rightarrow r = 4x + 11$	1p 1p 2p 1p
c)	$g(x) = (x+2)(x+3) \Rightarrow \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}, (\forall) x \in \mathbb{N} \Rightarrow$ $\Rightarrow S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} - \frac{1}{2016} = \frac{1007}{2016}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} + 2x = 2(e^{2x} + x)$ $f'(x) > 0 (\forall) x \in [0,1]$ $\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[0,1]$	2p 2p 1p
b)	$f(0) = -1 < 0, f(1) = e^2 - 1 > 0$ f continuă pe $[0,1]$ $\Rightarrow f$ are cel puțin o rădăcină în $(0,1)$ (1) f strict crescătoare pe $[0,1]$ (2) $(1),(2) \Rightarrow f$ are o singură rădăcină în $(0,1)$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f''(x) = 2(2e^{2x} + 1), f'''(x) = 2^3 e^{2x} \Rightarrow P_3(A)$ (I) $P_k(A) \Rightarrow P_{k+1}(A)$ $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (2^k e^{2x})' = 2^{k+1} e^{2x} (A)$ (II) Din (I) și (II) $\Rightarrow P_n(A) (\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 3$	2p 2p 1p
2. a)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x+1)^3}{3} - \frac{1}{3}}{x^3} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - 1}{3x^3} = \frac{1}{3}$	3p 2p
b)	$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)-1}{(x+1)^2} dx =$ $\int \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} dx = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + c$ Fie $H(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + c,$ $H(0) = -1 \Leftrightarrow 1 + c = -1 \Leftrightarrow c = -2$ $\Rightarrow H(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 2$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$V = \int_0^1 \pi f^2(x) dx =$ $= \pi \frac{(x+1)^5}{5} \Big _0^1 =$ $= \frac{31\pi}{5}$	1p 2p 2p