

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 19**

Prof: Ciocănar Viorica

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Termenul general al progresiei aritmetice $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$, precizarea valorilor lui a_1 , n , r . Calculul lui $a_{11} = 2 + (11 - 1) \cdot 3$ de unde rezultă $a_{11} = 32$	3p 2p
2.	Formula $\log_a a = 1$, $0 < a < 1$, $a > 1$ și $\log_3 3 = 1$ Formulele $m \log_a A = \log_a A^m$, $0 < a < 1$, $a > 1$, $A > 0$ $\log_a A + \log_a B - \log_a C = \log_a \frac{AB}{C}$, $0 < a < 1$, $a > 1$, $A, B, C > 0$ Calculele $\log_3 3 + 3 \log_3 2 - 2 \log_3 4 = 1 + \log_3 \frac{2^3}{4^2} = 1 - \log_3 2$	1p 2p 2p
3.	Intersecția G_f cu Ox înseamnă rezolvarea ecuației $f(x) = 0$ Rezolvarea ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ Calculele $\Delta = 1$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ deci $G_f \cap Ox = \{A, B\}$, $A(3, 0)$, $B(2, 0)$.	1p 2p 2p
4.	Formulele $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$, $P_n = n!$ Calculele $C_5^2 = 10$, $A_5^2 = 20$, $P_3 = 6$ și finalizarea $2C_5^2 - A_5^2 + P_3 = 2 \cdot 10 - 20 + 6 = 6$	2p 3p
5.	Înmulțirea unui vector $\vec{t} = a \vec{i} + b \vec{j}$ cu un scalar s real, $s \vec{t} = sa \vec{i} + sb \vec{j}$	2p 3p

	Calculele $2\vec{v} - 3\vec{u} = 2(2\vec{i} + 3\vec{j}) - 3(3\vec{i} - 2\vec{j}) = -5\vec{i} + 12\vec{j}$.	
6.	Formula pentru aria triunghiului $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$.	2p
	$\sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.	1p
	Calculul ariei $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 20$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Matricea sistemului este inversabilă dacă $D(a) \neq 0$.	2p
	$D(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 3 & 1 \\ a^2 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ determinant Vandermonde sau se aplică una din regulile uzuale pentru calculul lui $D(a)$ $D(a) = -2(a-1)(a-3)$. $a \neq 1, a \neq 3$.	2p 1p
b)	$A^t = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A^t = \det A$ Din punctul a) $D(a) = -2(a-1)(a-3)$ $D(2) = -2(2-1)(2-3) = 2$	3p 2p
c)	Din punctul a) $D(a) = -2(a-1)(a-3)$, $D(4) = -2(4-1)(4-3) = -6$ $\text{Cu metoda lui Cramer se calculează } D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 16 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$ Calculele conduc la $D_x = -16$, $D_y = 30$, $D_z = -20$ și $x = \frac{D_x}{D(4)}$, $y = \frac{D_y}{D(4)}$, $z = \frac{D_z}{D(4)}$ deci $S = \left\{ \left(\frac{8}{3}, -5, \frac{10}{3} \right) \right\}$.	1p 2p 2p

2.	Din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -8$,	1p
a)	$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$, $x_1x_2x_3x_4 = 16$ se determină $S = 0$, $f(S) = 16$, $P = 16$, $f(S) + P = 16 + 16 = 32$.	3p 1p
b)	Polinomul $f = X^4 - 8X^2 + 16$ se restrânge în $(X^2 - 4)^2 = (X - 2)^2(X + 2)^2$. Unul din factorii lui f este polinomul g deci g divide f .	3p 2p
c)	Din punctul b) rădăcinile polinomului f sunt $x_1 = x_2 = 2$, $x_3 = x_4 = -2$. $x_1^4 = x_2^4 = 2^4 = 16$, $x_3^4 = x_4^4 = (-2)^4 = 16$. $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 16 + 16 = 32$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Formula $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Calculul lui $\left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right)' = \frac{(2x)'(x^2 + 3) - 2x(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2}$, deci $f'(x) = \frac{-2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2}$. Calculul lui $f'(0) = \frac{2}{3}$.	2p 2p 1p
b)	Rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$ conduce la aflarea punctelor de extrem. Din punctul a) $f'(x) = \frac{-2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2}$ și $f'(x) = 0$ rezultă $\frac{-2(x^2 - 3)}{(x^2 + 3)^2} = 0$. $x^2 - 3 = 0$ și $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. $f(\pm\sqrt{3}) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ de unde rezultă punctele de extrem de coordonate $(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3})$.	1p 1p 1p 2p
c)	Notarea $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{x^2 + 3} - x\right) = L$. Aducerea la același numitor $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x(x^2 + 3)}{x^2 + 3}$.	1p 1p 1p

	<p>Calculele $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 - x}{x^2 + 3}$.</p> <p>Observarea nedeterminării $\frac{\infty}{\infty}$ și găsirea limitei $L = -\infty$.</p>	2p
2.	<p>Orice funcție continuă admite primitive, f este continuă pe $\mathbf{R} - \{1\}$, pentru continuitatea lui f în $x_0 = 1$ se calculează limitele laterale și $f(1)$.</p>	2p
a)	<p>$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-x^2 + 3x - 2) = 0$, $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x + 3) \ln x = 0$, $f(1) = (1+3)\ln 1 = 0 \Rightarrow f$ continuă în $x_0 = 1$.</p> <p>f admite primitive pe $\mathbf{R}$.</p>	2p 1p
b)	<p>0 și $\frac{1}{2} < 1$ deci $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2 + 3x - 2) dx$.</p> <p>$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$</p> <p>$\int (-x^2 + 3x - 2) dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + c$.</p> <p>$\int_0^{\frac{1}{2}} (-x^2 + 3x - 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x\right) \Big _0^{\frac{1}{2}} = -\frac{(\frac{1}{2})^3}{3} + 3\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - 2(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$.</p>	1p 1p 1p 2p
c)	<p>$1, e^2 \geq 1$ deci $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x+3} dx = \int_1^{e^2} \frac{(x+3) \ln x}{x+3} dx = \int_1^{e^2} \ln x dx$.</p> <p>Formula de integrare prin părți $\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$ f, g derivabile cu derivatele continue.</p> <p>$\int_1^{e^2} \ln x dx = x \ln x \Big _1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx = x \ln x \Big _1^{e^2} - x \Big _1^{e^2} = e^2 + 1$.</p>	2p 1p 2p