

6.	$A_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2}; A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ unde } p = \frac{AB+BC+AC}{2} = 9$ $\Rightarrow A_{ABC} = \sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)} = 3\sqrt{15}$ $\text{Deci, } \sin B = \frac{2A_{ABC}}{AB \cdot BC} = \frac{6\sqrt{15}}{32} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$	2p 1p 2p
----	--	------------------------

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Observăm că } M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*.$ <p>Demonstrăm prin inducție.</p> <p>Presupunem adevărat că $M^k = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și demonstrăm $M^{k+1} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$</p> $M^{k+1} = M^k \cdot M = \begin{pmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Deci } M^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$	2p 2p 1p
b)	$\det \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3^n$ $7 \cdot \det(M^n) - 4 \cdot 3^n = 729 \Leftrightarrow 7 \cdot 3^n - 4 \cdot 3^n = 729 \Leftrightarrow 3^{n+1} = 3^6 \Rightarrow n = 5$	2p 3p
c)	$M + M^2 + \dots + M^{2012} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 3^{2012} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3^2+\dots+3^{2012} & 0 \\ 0 & 2012 \end{pmatrix}$ $3+3^2+\dots+3^{2012} = 3 \cdot \frac{3^{2012}-1}{3-1} = 3 \cdot \frac{3^{2012}-1}{2}, \text{ fiind suma unei progresii geometrice cu rația 3 și primul termen 3.}$ $\text{Deci } S = \begin{pmatrix} \frac{3(3^{2012}-1)}{2} & 0 \\ 0 & 2012 \end{pmatrix}$	2p 2p 1p
2. a)	$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 - (m+1) + 2n = 0 \\ 16 - 4(m+1) + 2n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2n = 3 \\ 4m - 2n = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = 4 \end{cases}$	5p

b)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{m+1}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{(m+1)^2}{4} = 4 \Rightarrow (m+1)^2 = 4^2 \Rightarrow (m-3)(m+5) = 0 \Rightarrow m = 3$	2p 1p 2p
c)	$2 \cdot 625^x - 6 \cdot 25^x + 8 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot 5^{4x} - 6 \cdot 5^{2x} + 8 = 0 \Rightarrow 5^{4x} - 3 \cdot 5^{2x} + 4 = 0$ <p>Notez $5^{2x} = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 4 = 0; \Delta = 9 - 16 < 0$</p> <p>Ecuatia nu admite soluții reale.</p>	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{(e^{x-2} + xe^{x-2})(x-1)^2 - 2xe^{x-2}(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^{x-2}(x-1)[(1+x)(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} =$ $= \frac{e^{x-2}[x^2 - 2x - 1]}{(x-1)^3}$	5 p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^{x-2}}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^3}{e^{x-2}(x^2 - 2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 1} = 1$	5 p
c)	<p>Ecuatia tangentei într-un punct (x_0, y_0) la graficul funcției $f(x)$ este $y - y_0 = m(x - x_0)$, unde $m = f'(x_0)$ și $y_0 = f(x_0)$.</p> <p>În cazul nostru $x_0 = 2, y_0 = f(x_0) = f(2) = 2; m = f'(2) = -1 \Rightarrow$</p> <p>$y - 2 = -(x - 2) \Leftrightarrow x + y - 4 = 0$, care este ecuația tangentei</p>	2 p 2 p 1 p

2. a)	$\int_{-1}^1 (x - f(x) + \ln(x+2))^2 dx = \int_{-1}^1 (x - \ln(x+2) + x + 2 + \ln(x+2))^2 dx = \int_{-1}^1 (2x+2)^2 dx =$ $= 4 \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx = 4 \frac{(x+1)^3}{3} \Big _{-1}^1 = \frac{4}{3} \cdot 8 = \frac{32}{3}$	5 p
b)	$f'(x) = \frac{1}{x+2} - 1 = \frac{1-x-2}{x+2} = \frac{-x-1}{x+2};$ $f''(x) = \left(\frac{-x-1}{x+2} \right)' = \frac{-x-2+x+1}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ <p>Deci funcția este concavă pe $(-2; \infty)$</p>	2 p 2 p 1 p
c)	$A = \int_1^e g(x) = \int_1^e \ln(x+2) dx = \int_1^e (x)' \cdot \ln(x+2) dx = x \cdot \ln(x+2) \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{x+2} dx =$ $e \ln(e+2) - \ln 3 - x \Big _1^e + 2 \ln(x+2) \Big _1^e = e \ln(e+2) - \ln 3 - e + 1 + 2 \ln(e+2) - 2 \ln 3 = (e+2) \ln(e+2) + 1 - 3 \ln 3$	2 p 3 p