

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 27**

Prof: Gaga Loghin

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z = (1 - i\sqrt{3})^3 = (1 - i\sqrt{3})^2 \cdot (1 - i\sqrt{3}) = (-2 - 2i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = -2(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = -8$ $\Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$	4p 1p
2.	$x_1^2 + x_2^2 = 16 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = m - 2 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 3 \end{cases}$ $\Rightarrow (m - 2)^2 - 2(m - 3) = 16 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 - 2m + 6 = 16$ $\Leftrightarrow m^2 - 6m - 6 = 0 \Rightarrow m_1 = 3 + \sqrt{15}, m_2 = 3 - \sqrt{15}$	2p 1p 2p
3.	$C_{2012}^7 - C_{2012}^{2005} = C_{2012}^7 - C_{2012}^{2012-2005} = C_{2012}^7 - C_{2012}^7 = 0$	5p
4.	$p = \frac{c_f}{c_p}, \text{ unde } c_f \text{ reprezintă numărul cazurilor favorabile și } c_p \text{ numărul cazurilor posibile.}$ $\text{Avem } c_p = 2013, \text{ iar } c_f = \frac{2013}{3} = 671$ $p = \frac{c_f}{c_p} = \frac{671}{2013} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$(m + 2)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ $\Rightarrow m = 3$	3p 2p

6.	Observăm că $BC^2 = 25 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \xRightarrow{\text{cf. Reciproca T. Pitagora}} \Delta ABC$ este dreptunghic, cu ipotenuza BC.	2p
	Știm că, într-un triunghi dreptunghic, mediana din vârful unghiului drept este egală cu jumătate din ipotenuză. Notăm cu M mijlocul ipotenuzei BC	2p
	$\Rightarrow AM = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$	2p
		1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{vmatrix}.$ $\det A = 0 \Rightarrow (x+5)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x-11)(x+21) = 0 \Rightarrow x_1 = 11, x_2 = -21$ (se înlocuiește cu: $(x+5)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+9) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -9$)	2p 3p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+5 & 4 \\ 4 & x+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+5)^2 + 16 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & (x+5)^2 + 16 \end{pmatrix}$ $(2x+10) \cdot A = \begin{pmatrix} 2(x+5)^2 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & 2(x+5)^2 \end{pmatrix}$ $(x^2 + 10x + 9)I_2 = \begin{pmatrix} x^2 + 10x + 9 & 0 \\ 0 & x^2 + 10x + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+5)^2 - 16 & 0 \\ 0 & (x+5)^2 - 16 \end{pmatrix}$ $A^2 - (2x+10)A + (x^2 + 10x + 9)I_2 =$ $\begin{pmatrix} (x+5)^2 + 16 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & (x+5)^2 + 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(x+5)^2 & 8(x+5) \\ 8(x+5) & 2(x+5)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (x+5)^2 - 16 & 0 \\ 0 & (x+5)^2 - 16 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	1p 1p 1p 2p
c)	Pentru $x = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A^2 = 4^2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 8A = 2^3 \cdot A;$ $A^3 = A^2 \cdot A = 2^3 \cdot A^2 = 2^6 A;$ Presupunem $A^n = 2^{3(n-1)} A$ și demonstrăm $A^{n+1} = 2^{3n} A;$	2p

	$A^{n+1} = A^n \cdot A = 2^{3(n-1)} A \cdot A = 2^{3(n-1)} A^2 = 2^{3(n-1)} \cdot 2^3 A = 2^{3n} A$ <p>Deci $A^n = 2^{3(n-1)} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$</p>	2p 1p
2.	$g = \hat{0} \Rightarrow x + \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow x = \hat{1}.$	2p
a)	Trebuie să avem $f(\hat{1}) = \hat{0} \Rightarrow \hat{1} + a + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0} \Rightarrow a + \hat{4} = \hat{0} \Rightarrow a = \hat{1}$	3p
b)	<p>Pentru $a = \hat{1} \Rightarrow f(X) = X^3 + X^2 + X + \hat{2}$ și $x = \hat{1}$ este soluție a polinomului.</p> <p>Se verifică faptul că $x = \hat{1}$ este singura soluție.</p> <p>Împărțind, sau folosind schema lui Horner, obținem</p> $f(X) = (X + \hat{4})(X^2 + \hat{2}X + \hat{3})$	2p 1p 2p
c)	$f(\hat{0}) = \hat{2}; f(\hat{1}) = \hat{0}; f(\hat{2}) = \hat{3} + \hat{4} + \hat{2} + \hat{2} = \hat{1}; f(\hat{3}) = \hat{2} + \hat{4} + \hat{3} + \hat{2} = \hat{1};$ $f(\hat{4}) = \hat{4} + \hat{1} + \hat{4} + \hat{2} = \hat{1}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + \dots + f(\hat{4}) = \hat{2} + \hat{1} + \hat{1} + \hat{1} = \hat{0}$	4p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln^2 x}{1 + \ln^2 x} = 1$	5p
b)	$f'(x) = \frac{\left(-\frac{2}{x} \cdot \ln x\right) \cdot (1 + \ln^2 x) - (1 - \ln^2 x) \cdot \left(\frac{2}{x} \cdot \ln x\right)}{(1 + \ln^2 x)^2} =$ $= \frac{\frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot (-1 - \ln^2 x - 1 + \ln^2 x)}{(1 + \ln^2 x)^2} = -\frac{4}{x(1 + \ln^2 x)^2}$	2p 3p
c)	<p>Asimptotă verticală. Se caută în $x=0$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1 - \ln^2 x}{1 + \ln^2 x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{2}{x} \ln x}{\frac{2}{x} \ln x} = -1$. Nu există</p> <p>asimptotă verticală pentru f.</p>	2p

	<p>Asimptotă orizontală. Se caută la $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \ln^2 x}{1 + \ln^2 x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{-\frac{2}{x} \ln x}{\frac{2}{x} \ln x} = -1$. Deci $y = -1$</p> <p>este asimptotă orizontală la $+\infty$.</p> <p>Asimptotă oblică. Nu există</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big _0^1 + \arctg x \Big _0^1 = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$	5p
b)	$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3+x-x+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)-x+1}{x^2+1} dx =$ $= \int_0^1 \left(x + \frac{-x+1}{x^2+1} \right) dx = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} = 1 - \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ <p>$I_1 - I_3 = \ln 2 - 1 < 0$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
c)	$I_n + I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^n+1}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{n+2}+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n+2}{x^2+1} dx =$ $= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1)}{x^2+1} dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{n+1} + \frac{\pi}{2}$	<p>2p</p> <p>3p</p>