

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 29**

Prof: Ionescu Maria.

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$ 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\}$	3p 2p
2.	Se pun condițiile de existență : $x-5 \geq 0 \Rightarrow x \in [5, +\infty)$ $2-x \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$ De unde se deduce că ecuația nu are soluții reale.	2p 2p 1p
3.	Cum $f(3)=0$ și $f(4)=0$ $\Rightarrow f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(10) = 0$	2p 3p
4.	Notăm $5^x = t$, $t > 0$ și ecuația devine $t^2 - 6t + 5 = 0$ $t_1 = 1$, $t_2 = 5$ $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$ $5^x = 5 \Rightarrow x = 1$	1p 2p 1p 1p
5.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ $\cos A = \frac{25 + 49 - 64}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$	2p 3p
6.	Ecuația dreptei MN: $\frac{x-x_M}{x_N-x_M} = \frac{y-y_M}{y_N-y_M}$ $\frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-5}$ $\Rightarrow x-y+1=0$ este ecuația dreptei MN.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 3 \\ -5 & -2 & 12 \end{pmatrix}$	5p
b)	$I_3 + A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ De unde se obține $\det(I_3 + A) = -14$	2p 3p
c)	$\det(A) = -8 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^{-1} = \frac{-1}{8} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ 7 & -11 & 5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	1p 4p
2. a)	$x \circ 5 = (x-5)(5-5) + 5 = 0 + 5 = 5$ $5 \circ x = (5-5)(x-5) + 5 = 0 + 5 = 5$ $\Rightarrow x \circ 5 = 5 \circ x = 5, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$	2p 2p 1p
b)	Căutăm $e \in \mathbb{Z}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$. Se verifică $x \circ e = e \circ x$. Din $x \circ e = x \Rightarrow (x-5)(e-5) + 5 = x \Rightarrow (x-5)(e-6) = 0 \Rightarrow e = 6 \in \mathbb{Z}$	2p 3p
c)	$x \circ x \circ x \circ x \circ x = x \Leftrightarrow (x-5)^5 + 5 = x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-5)^5 - (x-5) = 0 \Leftrightarrow (x-5)[(x-5)^4 - 1] = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-5) = 0 \Rightarrow x = 5 \\ (x-5)^4 = 1 \Rightarrow (x-5) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases}$	1p 1p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$, fiind produs de funcții derivabile pe $\mathbb{R}$ și	2p
----------	---	----

	$f'(x) = (x^2 - 2012x + 2011)' e^x + (x^2 - 2012x + 2011)(e^x)'$ $f'(x) = (2x - 2012)e^x + (x^2 - 2012x + 2011)e^x =$ $f'(x) = (x^2 - 2010x - 1)e^x$	<p>2p</p> <p>1p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = -1$ $f'(0) = -1$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Din punctul a) se obține că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[0, 2]$</p> $\Rightarrow f(2) \leq f(1) \leq f(0)$ $f(2) = -2009e^2, f(0) = 2011$ $\Rightarrow -2009e^2 \leq f(1) \leq 2011$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2. a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx$ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2} dx = \int_0^1 \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{4}{x+2} dx$ $I_2 = \left[\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x+2) \right]_0^1 = 4 \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
b)	$I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2} dx + 2 \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$ $I_{n+1} + 2I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+2)}{x+2} dx = \int_0^1 x^n dx$ $I_{n+1} + 2I_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Din $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0, 1], \Rightarrow \frac{x^n}{3} \leq \frac{x^n}{x+2} \leq \frac{x^n}{2}, \forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ și deci</p> $\int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$ <p>Pentru $n=2011$ se obține $\frac{1}{3} \leq 2012 \cdot I_{2011} \leq \frac{1}{2}$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>