

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 41**

Prof: Viorica Lungana

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$\sqrt{\frac{3}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}} + \sqrt{\frac{3}{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2}} - \sqrt{\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2}}$ $= 1 + 1 = 2$ <p>Am folosit formula radicalilor dubli $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, unde $C^2 = A^2 - B$.</p>	3p 2p
2	$ 2x - 1 = x + 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = \pm(x + 2)$ <p>Dacă $2x - 1 = x + 2 \Leftrightarrow x = 3$.</p> <p>Dacă $2x - 1 = -x - 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$</p>	1p 2p 2p
3	$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^{-x} \cdot \frac{3}{5} = 2$ <p>Notăm $\left(\frac{3}{5}\right)^x = y$ și ecuația devine $y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 3 \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{matrix}$</p> $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 3 \Rightarrow x \log_3 \frac{3}{5} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{1 + \log_3 5}$ $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x \log_3 \frac{3}{5} = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{1 + \log_3 5}$ <p>$x_1 + x_2 = 0$</p>	1p 1p 2p 1p

4	$C_x^y = C_y^x \Rightarrow \begin{cases} x \geq y \\ y \geq x \end{cases} \Rightarrow x = y; (x+y)! < 1000 \Rightarrow (2x)! < 1000$ <p>$x = 0 \Rightarrow 0! = 1 < 1000$ este soluție. $x = 1 \Rightarrow 2! = 2 < 1000$ este soluție.</p> <p>$x = 2 \Rightarrow 4! = 24 < 1000$ este soluție. $x = 3 \Rightarrow 6! = 720 < 1000$ este soluție.</p> <p>$x = 4 \Rightarrow 8! = 8 \cdot 7 \cdot 720 > 1000$ nu este soluție.</p> <p>Deci $M = \{(1,1), (2,2), (3,3), (0,0)\} \Rightarrow \text{card} M = 4$.</p>	2p 3p
5	$P = AB + BC + CA; MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$ <p>$AB = \sqrt{37}, BC = \sqrt{61}, CA = 4. P = \sqrt{37} + \sqrt{61} + 4$</p>	2p 3p
6	$E = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\cos^6 x (tg^6 x + 1)}{\cos^4 x (tg^4 x + 1)} = \cos^2 x \cdot \frac{1 + tg^6 x}{1 + tg^4 x} = \frac{1}{1 + tg^2 x} \cdot \frac{1 + tg^6 x}{1 + tg^4 x}$ <p>$E = \frac{1}{1+4} \cdot \frac{1+64}{1+16} = \frac{65}{5 \cdot 17} = \frac{13}{17}$</p>	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2x^2 & 1-x^3 & -2x-a \\ -2x^2 & x^3 & 2x+a \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} \stackrel{I1+I2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2x^2 & x^3 & 2x+a \\ 1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} =$ $= - \begin{vmatrix} -2x^2 & 2x+a \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = -(-2x^3 + 4x^2 - 2x - a) =$ $= 2x^3 - 4x^2 + 2x + a$	2p 2p 1p
b)	$a = 0 \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 2x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ și}$ $x_2 = x_3 = 1$	3p 2p
c)	<p>Fie $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x + a$. $x = \alpha$ rădăcină dublă $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ f'(\alpha) = 0 \\ f''(\alpha) \neq 0 \end{cases}$</p>	1p

	$f'(x) = 6x^2 - 8x + 2$ $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(3\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1; \alpha_2 = \frac{1}{3}$ $\alpha_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$ $\alpha_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = -\frac{8}{27}$ $S = a_1 + a_2 = -\frac{8}{27}$	1p 1p 1p 1p
2.	Se calculează elementele neutre ale celor două legi de compoziție.	
a)	$x * e = x, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + e + 3 = x, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow e = -3 \in \mathbb{Z}, (\forall) x \in \mathbb{Z}.$ $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6 = (x+3)(y+3) - 3$ $x \circ e' = x, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x+3)(e'+3) - 3 = x, (\forall) x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x+3)(e'+2) = 0, (\forall) x \in \mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow e' = -2 \in \mathbb{Z}, (\forall) x \in \mathbb{Z}.$ Din $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3 = (y+3)(x+3) - 3 = y \circ x, (\forall) x, y \in \mathbb{Z}$, rezultă inelul $(\mathbb{Z}, *, \cdot)$ este inel comutativ. Fie $x \neq -3, y \neq -3$. Să arătăm că $x \circ y \neq -3$. Presupunem $x \circ y = -3 \Rightarrow (x+3)(y+3) - 3 = -3 \Rightarrow (x+3)(y+3) = 0 \Rightarrow x = -3$ sau $y = -3$, ceea ce contrazice ipoteza, deci $x \circ y \neq -3$, adică inelul $(\mathbb{Z}, *, \cdot)$ este inel comutativ și fără divizori ai lui zero.	1p 1p 1p 2p
b)	Fie $x, x' \in \mathbb{Z}$. Să arătăm că x' este inversul lui x . $x \circ x' = -2 \Leftrightarrow (x+3)(x'+3) - 3 = -2 \Leftrightarrow (x+3)(x'+3) = 1 \Leftrightarrow x' + 3 = \frac{1}{x+3} \Leftrightarrow$ $x' = -3 + \frac{1}{x+3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x+3 \in \{-1, 1\}.$ Dacă $x+3 = -1 \Rightarrow x = -4$. Dacă $x+3 = 1 \Rightarrow x = -2$.	3p 2p

	Deci, elementele inversabile sunt $x = -4$ și $x = -2$.	
c)	$(\mathbb{Z}, *, \cdot)$ este corp dacă orice element $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq -3$ este inversabil în raport cu legea „ $\circ$ ”. În acest caz, conform punctului b), numai 2 elemente sunt inversabile. Deci $(\mathbb{Z}, *, \cdot)$ nu este corp.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f'(x) = 2x - 7$	3p
a)	$f'(x) = -5 \Leftrightarrow 2x - 7 = -5 \Leftrightarrow x = 1$	2p
b)	$y = -5x + 3 \Rightarrow m = -5$ Coeficientul unghiular al tangentei la graficul funcției în $x = \alpha$ este $f'(\alpha)$. Tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y = -5x + 3$ dacă $f'(\alpha) = -5 \Leftrightarrow \alpha = 1$ $f(1) = 2 + 3 - 7 = -2 \Rightarrow T(1, -2)$ este punctul de tangență.	1p 1p 1p 2p
c)	$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ $y + 2 = -5(x - 1) \Leftrightarrow 5x + y - 3 = 0$	2p 3p
2.	$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big _0^1 = \ln(1 + \sqrt{2})$	2p
a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big _0^1 = \sqrt{2} - 1$	3p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} dx < 0$ Deoarece $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} < 0$, adică șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător.	1p 1p 1p

	<p>Dar $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \Rightarrow 0 < I_n \leq I_1 \Rightarrow$ șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este mărginit.</p> <p>Din $(I_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și $(I_n)_{n \geq 0}$ mărginit rezultă, conform criteriului lui Weiersrass, șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este convergent.</p>	2p
c)	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^1 x^{n-1} \cdot (\sqrt{1+x^2}) dx = x^{n-1} \cdot \sqrt{1+x^2} \Big _0^1 - (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \cdot \sqrt{1+x^2} dx =$ $= \sqrt{2} - (n-1) \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} dx =$ $= \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \Rightarrow nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$	2p 2p 1p