

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 42**

Prof: Viorica Lungana

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$[x-2]=3 \Leftrightarrow 3 \leq x-2 < 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 3 \\ x-2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow x \in [5,6)$	3p 2p
2.	$a=1>0 \Rightarrow \text{Im } f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{-7}{4} = \frac{7}{4}$ $\text{Im } f = \left[\frac{7}{4}, \infty\right)$	2p 2p 1p
3.	Folosim formula $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$ $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{63} 64 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \dots \cdot \frac{\log_2 64}{\log_2 63} =$ $= \log_2 64 = 6$	1p 2p 2p
4.	$k \cdot k! = [(k+1)-1] \cdot k! = (k+1) \cdot k! - k! = (k+1)! - k!$ Calculăm fiecare termen din sumă și obținem: $1 \cdot 1! = 2! - 1!$ $2 \cdot 2! = 3! - 2!$ $3 \cdot 3! = 4! - 3!$	1p 3p

	 $10 \cdot 10! = 11! - 10!$ $\Rightarrow 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + 9 \cdot 9! + 10 \cdot 10! = 11! - 1$	1p
5.	$\vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b}^2 =$ $= 2 \cdot 4 + 3(-4) - 2 \cdot 9 = 8 - 12 - 18 = -22$	2p 3p
6.	Folosim formula $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$ $= 2 \sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$	2p 3p
b)	$A^{3p} = (A^3)^p = I_3^p = I_3$ $A^{3p+1} = A^{3p} \cdot A = I_3 \cdot A = A$ $A^{3p+2} = A^{3p} \cdot A^2 = I_3 \cdot A^2 = A^2$ Deci $A^n = \begin{cases} I_3, & n = 3p \\ A, & n = 3p+1, \quad p \in \mathbb{N}^* \\ A^2, & n = 3p+2 \end{cases}$	2p 1p 1p 1p
c)	$2012 = 3 \cdot 670 + 2$	1p

	$A^{2012} = A^{3 \cdot 670 + 2} = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p
	Suma elementelor matricei A^{2012} este $1+1+1=3$	2p
2.	$x * y = x^{\ln y} = e^{\ln x^{\ln y}} =$ a) $= e^{\ln y \ln x} = e^{\ln x \ln y} = e^{\ln y^{\ln x}} =$ $= y^{\ln x} = y * x, \forall x, y \in (0, \infty) \Rightarrow "*" \text{ este comutativă.}$	1p 3p 1p
b)	<p>Legea "*" admite element neutru $\Leftrightarrow (\exists) E \in (0, \infty)$ astfel încât $x * E = E * x = x, (\forall) x \in (0, \infty)$.</p> <p>$x * E = x, (\forall) x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x^{\ln E} = x, (\forall) x \in (0, \infty) \Leftrightarrow \ln E = 1, (\forall) x \in (0, \infty) \Rightarrow$ $\Rightarrow E = e \in (0, \infty), (\forall) x \in (0, \infty)$</p> <p>Deci e (numărul „e”) este elementul neutru al legii.</p> <p>Să arătăm că $(\forall) x \in (0, \infty), (\exists) x' \in (0, \infty)$ astfel încât $x * x' = x' * x = e$</p> <p>$x * x' = e, (\forall) x \in (0, \infty) \Leftrightarrow x^{\ln x'} = e, (\forall) x \in (0, \infty) \Leftrightarrow \ln x' \ln x = 1, (\forall) x \in (0, \infty) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x}, (x \neq 1) \Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}} \in (0, \infty), (\forall) x \in (0, \infty)$ deci, orice element din G este simetrizabil în raport cu această lege.</p>	3p 2p
c)	<p>Simetricul numărului e în raport cu legea „*” este $e' = e^{\frac{1}{\ln e}} = e^{\frac{1}{1}} = e$.</p> <p>Simetricul numărului $\frac{1}{e}$ în raport cu legea „*” este $\left(\frac{1}{e}\right)' = e^{\frac{1}{\ln \frac{1}{e}}} = e^{\frac{1}{\ln e^{-1}}} = e^{\frac{1}{-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.		
a)	$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2}}$	3p

	$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{matrix}$	2p
b)	$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}}{x} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 - x^2} - x) \stackrel{-\infty + \infty}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 - x^2} + x^2} =$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x^2 \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right)} = -\frac{1}{3}$ <p>Deci $y = x - \frac{1}{3}$.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
c)	<p>Pentru $m = 1$ și $n = -\frac{1}{3}$</p> $\frac{m^2}{n^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$ $(m - n)^2 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ $\frac{m^2}{n^2} + (m - n)^2 = 9 + \frac{16}{9} = \frac{81 + 16}{9} = \frac{97}{9}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2. a)	<p>Pentru $x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\sqrt{x} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$</p> <p>Pentru $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right]$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2x - 1 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow$</p> $\begin{matrix} x = 1 \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \\ x = \frac{1}{4} \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \end{matrix}$ <p>Soluția $S = \left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}$.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

b)	$\sqrt{x} \geq -\sqrt{x}, (\forall)x \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ <p>1p</p> $\text{Pentru } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2x - 1, (\forall)x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ <p>1p</p> $\text{Pentru } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \sqrt{x} \geq 2x - 1 \Rightarrow x \geq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 \leq 0 \Rightarrow$ $x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ <p>1p</p> <p>Deci pentru $x \in [0, 1] \Rightarrow f(x) \geq g(x)$, funcțiile f și g sunt funcții continue.</p> $\text{Aria}(\Gamma_{f,g}) = \int_0^{\frac{1}{4}} [f(x) - g(x)] dx = \int_0^{\frac{1}{4}} (\sqrt{x} + \sqrt{x}) dx + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x} - 2x + 1) dx = 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big _0^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big _{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} -$ $- x^2 \Big _{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} + x \Big _{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} x \sqrt{x} \Big _0^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big _{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{16} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{16} =$ $= \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{12} - \frac{3}{16} = \frac{8 + 32 - 4 - 9}{48} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16}$ <p>2p</p>	
c)	$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cos x \right) dx = \int_0^{\pi} \left[(\sqrt{x})' \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot (\sin x)' \right] dx =$ <p>2p</p> $= \int_0^{\pi} (\sqrt{x} \sin x) dx =$ <p>1p</p> $= \sqrt{x} \sin x \Big _0^{\pi} = \sqrt{\pi} \sin \pi - 0 = 0$ <p>2p</p>	