

Variantă 45

1.	$a_1 = 2, a_n = 222, r = 10$ Aflăm $n=23$, aplicând formula : $a_n = a_1 + (n-1)r$ Atunci $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{23} = 2576$	3p 2p
2.	$x^2 - 9 \geq 0$ $x^2 - 9 = 16$ $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \text{ sau } x = -5$	1p 2p 2p
3.	$A(m, 5) \in G_f \Rightarrow f(m) = 5$ $f(m) = 2m^2 - 3m + 5$ $\Rightarrow 2m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ sau } m = \frac{3}{2}$	1p 2p 2p
4.	Numărul numerelor este A_4^3 $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$	2p 3p

5.	Dacă notăm cu $n, n+1, n+2$ lungimile laturilor , atunci din Teorema lui Pitagora , avem : $(n+2)^2 = n^2 + (n+1)^2$ $\Rightarrow n^2 - 2n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3$. Deci lungimile laturilor sunt 3,4,5 .	2p 3p
6.	$\sin(\pi - x) = \sin x, \cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin 155^\circ = \sin 25^\circ, \cos 155^\circ = -\cos 25^\circ$ $\sin 25^\circ + \cos 25^\circ - \sin 155^\circ + \cos 155^\circ = 0$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Înlocuim $x=1, y=2, z=3$ în ultima ecuație a sistemului	2p
a)	$1 - 3 \cdot 2 + m \cdot 3 = 4$ $m=3$	2p 1p
b)	Calculăm determinantul matricei sistemului : $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & m \end{vmatrix} = -5m - 10$ $d \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$	3p 2p
c)	Pentru $m=-2$, sistemul devine : $\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 3y - 2z = 4 \end{cases}$ Dacă scădem din ecuația (2) , ecuația (1) $\Rightarrow x - 3y - 2z = -11$ Se obține o contradicție cu ecuația (3)	1p 2p 2p
2.	f este divizibil cu $X-1 \Rightarrow f(1) = 0$	1p
a)	$f(1) = 2 + a$ $2 + a = 0 \Rightarrow a = -2$	3p 1p

b)	Pentru $a=-2 \Rightarrow f = X^3 - 2X^2 + 1 = (X-1)(X^2 - X - 1)$	3p
	Rădăcinile reale ale lui f sunt : $x_1 = 1, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	2p
c)	Din relațiile lui Viète avem: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$	2p
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$	2p
	Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$ este un număr natural pătrat perfect , $(\forall)a \in \mathbb{Z}$	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$, deci dreapta $x=0$ este asimptotă verticală $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, deci nu există asimptote orizontale Aflăm dacă există asimptote oblice . Avem : $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, dar $n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = +\infty$ deci nu există asimptote oblice .	2p
b)	$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $x > 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0$ $\Rightarrow f'(x) > 0$ Deci f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$.	1p
c)	Aplic Teorema lui Lagrange pe intervalul $[a,b] \Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, $c \in (a,b)$ $f'(c) = 1 + \frac{\ln b - \ln a}{b-a}$	1p
		1p

	$f'(c) = 1 + \frac{1}{c}$	1p
	$\Rightarrow c = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$. Dar $a < c < b$ de unde rezultă inegalitatea .	2p
2.	Verific dacă : $F'(x) = f(x), (\forall) x \in R$	2p
a)	$F'(x) = e^x + 6x^2 + 1 = f(x)$	2p
	Deci F este o primitivă a lui f .	1p
b)	$\int_0^1 x \cdot f(x) dx = \int_0^1 x(e^x + 6x^2 + 1) dx =$	1p
	$= \int_0^1 x e^x dx + 6 \int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 x dx =$	1p
	$\int_0^1 x e^x dx = 1$	1p
	Finalizare : $\int_0^1 x \cdot f(x) dx = 1 + \frac{6}{4} + \frac{1}{2} = 3$.	2p
c)	$\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx = \int_0^1 F(x) \cdot F'(x) dx =$	2p
	$= \frac{F^2(1)}{2} - \frac{F^2(0)}{2} =$	1p
	$= \frac{(e+2015)^2 - 2013^2}{2} = \frac{(e+2)(e+4028)}{2}$	2p