

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE****Varianta 5**

Prof: Andone Emanuel.

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1. | $\log_7 25 = \frac{\log_5 25}{\log_5 7} = \frac{2}{\log_5 7}$ $\log_5 7 \cdot \log_7 25 = 2, \text{ deci este număr natural}$                                                                                                                                                                                                       | 3p<br>2p       |
| 2. | $x^2 + x + m \geq -4 \Leftrightarrow x^2 + x + m + 4 \geq 0$ <p>o funcție de gradul al doilea are semn constant, semnul coeficientului lui <math>x^2</math>, pe <math>\mathbb{R}</math> dacă și numai dacă <math>\Delta \leq 0, \Delta = -4m - 15</math></p> $-4m - 15 \leq 0 \rightarrow m \in \left[-\frac{15}{4}, \infty\right)$ | 1p<br>2p<br>2p |
| 3. | $\frac{1}{5^x} = 5^{-x}$ <p>Ecuția devine <math>5^{-x} = 5^{-10}</math></p> $x = 4$                                                                                                                                                                                                                                                 | 1p<br>2p<br>2p |
| 4. | $A_n^2 = n(n-1) = 56$ <p>Se rezolvă ecuația de gradul doi și se alege soluția naturală <math>n=8</math></p>                                                                                                                                                                                                                         | 2p<br>3p       |
| 5. | <p>Se calculează fiecare latură a triunghiului cu formula <math>AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}</math></p> $AB = AC = 1, BC = \sqrt{2}$ $P_{ABC} = 2 + \sqrt{2}$                                                                                                                                                          | 2p<br>3p       |

|    |                                                                |    |
|----|----------------------------------------------------------------|----|
| 6. | $\frac{BC}{\sin A} = 2R$                                       | 2p |
|    | $\cos A = \frac{1}{2} \rightarrow \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1p |
|    | $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$                                      | 2p |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

|          |                                                                                                                                                             |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.<br>a) | $2I_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                 | 2p |
|          | $A(2I_2 - A) = O_2$ , se verifică printr-un calcul elementar                                                                                                | 2p |
|          |                                                                                                                                                             | 1p |
| b)       | Se demonstrează prin inducție că $A^n = 2^{n-1} A$                                                                                                          | 3p |
|          | $\det A^n = 0$                                                                                                                                              | 2p |
| c)       | Se aplică formula binomului lui Newton                                                                                                                      | 1p |
|          | $(A + I_2)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} + \dots + C_n^n I_2 =$                                                                                             | 2p |
|          | $C_n^0 \cdot 2^{n-1} A + C_n^1 \cdot 2^{n-2} A + \dots + C_n^n I_2$                                                                                         | 2p |
|          | $I_2 + A \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot 2^k \right) = I_2 + A \left( \frac{1}{2} (1+2)^n - \frac{1}{2} \right) =$                              |    |
|          | $= I_2 + A \left( \frac{3^n - 1}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} & \frac{3^n - 1}{2} \\ \frac{3^n - 1}{2} & \frac{3^n + 1}{2} \end{pmatrix}$ |    |
| 2.<br>a) | $\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului $f \rightarrow f(\sqrt{2}) = 0$                                                                                      | 1p |
|          | $f(\sqrt{2}) = 16 + 4\sqrt{2} - a\sqrt{2} = 0$                                                                                                              | 3p |
|          | $a = 4 + 8\sqrt{2}$                                                                                                                                         | 1p |
| b)       | Se scriu relațiile lui Viete                                                                                                                                | 3p |

|    |                                                                                                                                                                          |                |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
|    | $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \frac{a}{3}$ $x_1x_2x_3x_4 = \frac{2}{3}$ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{a}{2}$ | 2p             |
| c) | $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$<br>Câtul este $3x^2 + 8x + 14$ și<br>restul este $x(20-a) - 12$                                                                                 | 2p<br>2p<br>1p |

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                      |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1.<br>a) | $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty \rightarrow x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \rightarrow$ graficul funcției nu admite asimptotă orizontală<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \rightarrow$ graficul funcției nu admite asimptotă oblică | 2p<br>2p<br>1p       |
| b)       | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x + 1) \ln x}{x^3} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x + 1)}{x^2} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$                                                                                                                                              | 2p<br>3p             |
| c)       | Ecuatia tangentei : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$<br>$x_0 = 1, y_0 = f(1) = 0$<br>$f'(x) = (2x - 1) \ln x + \frac{(x^2 - x + 1)}{x}, f'(1) = 1$<br>$y = x - 1$                                                                                                                                                                                   | 1p<br>1p<br>2p<br>1p |
| 2.       | Explicitând cele două module se obține                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                      |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                         |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| a) | $f(x) = \begin{cases} (-x+2)e^{-x}, & x \in (-\infty, 0) \\ (-x+2)e^x, & x \in [0, 2] \\ (x-2)e^x, & x \in (2, \infty) \end{cases}$ <p>se studiază continuitatea funcției <math>f</math> în punctele 0 și 2, în rest <math>f</math> fiind continuă deoarece este compunere de funcții elementare</p> <p><math>l_s(0)=l_d(0)=f(0)=2</math>; <math>l_s(2)=l_d(2)=f(2)=0 \rightarrow f</math> este continuă în punctele <math>x=2</math> și <math>x=0</math></p> <p><math>f</math> admite primitive pe mulțimea numerelor reale deoarece orice funcție continuă admite primitive</p>    | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>           |
| b) | <p>Utilizând integrarea prin părți se obține</p> $\int (-x+2)e^{-x} dx = (x-1)e^{-x}$ $\int (-x+2)e^x dx = (3-x)e^x + c_1$ $\int (x-2)e^x dx = (x-3)e^x + c_2$ <p>Din continuitatea primitivei <math>\rightarrow c_1 = -4</math> și <math>c_2 = 2e^2 - 4</math></p> <p>Deci primitiva funcției <math>f</math> va fi</p> $F(x) = \begin{cases} (x-1)e^{-x}, & x \in (-\infty, 0) \\ (3-x)e^x - 4, & x \in [0, 2] \\ (x-3)e^x + 2e^2 - 4, & x \in (2, \infty) \end{cases}$ <p>Primitiva care trece prin origine este <math>G(x)=F(x)+c</math>, <math>G(0)=0 \rightarrow c=1</math></p> | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> |
| c) | $\int_4^5 f(x) dx = (x-3)e^x \Big _4^5 = e^4(2e-1) \geq 32$ <p><math>2 &lt; e &lt; 3 \rightarrow 3 &lt; 2e-1 &lt; 5</math></p> <p><math>16 &lt; e^4 &lt; 81</math></p> <p><math>e^4(2e-1) &gt; 3 \cdot 16 = 48 &gt; 32</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>           |