

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 52**

Prof: Oláh Csaba.

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 3 = a, \log_6 9 = \frac{\log_2 9}{\log_2 6} = \frac{\log_2 3^2}{\log_2 2 \cdot 3} = \frac{2 \log_2 3}{1 + \log_2 3} = \frac{2a}{1+a}, \text{ în mod similar}$ $1 + \log_4 27 = 1 + \frac{\log_2 27}{\log_2 4} = 1 + \frac{3 \log_2 3}{2} = \frac{2 + 3 \log_2 3}{2} = \frac{2 + 3a}{2}$ $\frac{\log_6 9}{1 + \log_4 27} = \frac{\frac{2a}{1+a}}{\frac{2+3a}{2}} = \frac{4a}{(a+1)(3a+2)}.$	1p 2p 2p
2.	<p>Numerele raționale din mulțime: $\pm\sqrt[3]{8}, \pm\sqrt[3]{1}, 0$, adică 5 la număr</p> <p>Numărul de elemente al mulțimii: 21</p> <p>Probabilitatea ca să alegem la întâmplare un număr rațional $p = \frac{5}{21}$.</p>	2p 1p 2p
3.	<p>Ecuția poate fi scrisă așa $2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 0$,</p> <p>$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$.</p>	3p 2p
4.	<p>$x_1, x_2 \in (1, \infty), f(x_1) = 2^{x_1-1} + 1, f(x_2) = 2^{x_2-1} + 1$</p> <p>$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2^{x_1-1} + 1 = 2^{x_2-1} + 1 \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow x_1 = x_2$, deci f e injectivă.</p>	1p 2p 2p

5.	$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{81 + 100 - 36}{2 \cdot 9 \cdot 10} =$	3p
	$= \frac{145}{180} = \frac{29}{36}.$	2p
6.	$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}.$	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & -2 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 + 2c_3 \\ c_2 + c_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & a-2 & -2 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= - \begin{vmatrix} -3 & a-2 \\ a+2 & 0 \end{vmatrix} = (a-2)(a+2).$	3p 2p
b)	$\det A = (a-2)(a+2), \exists A^{-1}(a) \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.$	5p
c)	$a = 4$ $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 4y - 2z = 6 \\ 4x - y + z = 9 \end{cases}$, se adună prima ecuație cu a treia, și se obține $6x = 12 \Rightarrow x = 2$ $4x - y + z = 9$ Se înlocuiește $x = 2$ în prima și a doua ecuație și se obține $\begin{cases} y - z = -1 \\ 2y - z = 2 \end{cases} \begin{matrix} (-) \\ (-) \end{matrix} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow z = 4, \text{ deci } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$	2p 1p 2p
2. a)	$X^2 - 2X - 15 = (X+3)(X-5)$ $f: (X^2 - 2X - 15) \Leftrightarrow f$ e divizibil cu $(X-5)(X+3)$, adică are două rădăcini reale $x_1 = 5, x_2 = -3$, se verifică prin schema lui <i>Horner</i> .	1p 4p
b)	Folosind schema lui <i>Horner</i> , f se poate scrie	

	$f = (X - 5)(X + 3)(X^2 - 3X + 2) =$ $= (X - 5)(X + 3)(X - 1)(X - 2), \text{ rezultă că celelalte două rădăcini sunt } x_3 = 1 \text{ și } x_4 = 2$ <p>Adică toate rădăcinile sunt reale.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	<p>Fie $u(a)$ ultima cifră a numărului a, un număr se împarte la 10 dacă se termină în 0</p> <p>Fie $a = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n, n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>$n = 1 \Rightarrow u(a) = u(5 - 3 + 1 + 2) = 5$</p> <p>$n = 2 \Rightarrow u(a) = u(25 + 9 + 1 + 4) = 9$</p> <p>$n = 3 \Rightarrow u(a) = u(125 - 27 + 1 + 8) = 7$</p> <p>$n = 4 \Rightarrow u(a) = u(625 + 81 + 1 + 16) = 3$, cum ultimele cifre ale puterilor se repetă din 4 în 4 (în cazul numerelor 3 și 2) sau nu se schimbă deloc (5 și 1), se poate deduce ca acest număr a nu se va termina în 0, deci</p> <p>$(x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n) \not\equiv 0 \pmod{10}, n \in \mathbb{N}^*.$</p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ $f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})x - e^x + e^{-x}}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{e + e^{-1} - e + e^{-1}}{1} = \frac{2}{e}.$	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} =$ $= \infty - 0 = \infty, \text{ nu există asimptotă orizontală în } +\infty.$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(\ln x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\ln x} - \frac{1}{e^{\ln x}}}{\ln x} =$	<p>2p</p> <p>3p</p>

	$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \ln x} = \infty - 0 = \infty.$	
2.	$x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$ se verifică prin desfacerea parantezelor si efectuarea a) operațiilor de pe partea dreapta.	5p
b)	$\int f(x) dx = \int \frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x^2+1)} dx = \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1} dx =$ $= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$	2p 3p
c)	$\int_0^1 (x-1) f(x) dx = \int_0^1 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3-1}{x^2+1} dx =$ $= \int_0^1 \frac{\overset{=x(x^2+1)}{x^3+x}}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - \arctg 1 - 0 + \frac{1}{2} \ln 1 + \arctg 0 = \frac{1}{2} \ln \frac{e}{2} - \frac{\pi}{4}.$	2p 2p 1p