BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 53

Prof: Oláh Csaba.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Se cunoaşte formula $C_n^k = C_n^{n-k} \Rightarrow$	1p
	$\Rightarrow C_{16}^7 = C_{16}^9$ şi $C_{16}^{12} = C_{16}^4 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow a-b = C_{16}^7 - C_{16}^9 + C_{16}^{12} - C_{16}^4 = 0.$	2p
2.	$\Delta = (2m+3)^2 - 12m = 4m^2 + 9$	1p
	$\min\limits_{x\in R} f(x) = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{4m^2+9}{4m}$, $\min\limits_{x\in R} f(x) = -3 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow \dfrac{4m^2+9}{4m} = 3 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 9 = 0 \Rightarrow (2m-3)^2 = 0 \Rightarrow$	
	$\Rightarrow m = \dfrac{3}{2}.$	2p
3.	$x>1$, $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, trecem în baza $\sqrt{2}+1$	1p
	$\log_{\sqrt{2}+1}(x+1) + \dfrac{\log_{\sqrt{2}+1}(x-1)}{\log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}-1)_{=-1}} = 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}+1}(x+1) - \log_{\sqrt{2}+1}(x-1) = 1$	
	$\log_{\sqrt{2}+1}\dfrac{x+1}{x-1} = \log_{\sqrt{2}+1}(\sqrt{2}+1)$, deci $\dfrac{x+1}{x-1} = \sqrt{2}+1$	2p
	$x+1 = \sqrt{2}x + x - \sqrt{2} - 1 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}+1 > 1.$	2p

www.mateinfo.ro

4.	$b_3 = b_1 q^2$, $b_7 = b_1 q^6 \Rightarrow \frac{54}{6} = \frac{b_7}{b_3} = q^4 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$ $b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{6}{3} = 2$.	3p 2p
5.	$d: 2x - y + 4 = 0$, $y = 2x + 4 \Rightarrow m_d = 2$ $d_1: y - 2 = m_{d_1}(x-1)$, $m_d \cdot m_{d_1} = -1 \Rightarrow m_{d_1} = \frac{-1}{m_d} = -\frac{1}{2}$ $d_1: y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$.	1p 1p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$ (teorema sinusurilor) $\Rightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} =$ $= \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3}$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & 1 & 5 \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 10a - 5$, $a^2 + 10a - 5 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-5 - \sqrt{30}, -5 + \sqrt{30}\right\}$ A este inversabilă $\Rightarrow a \in R \setminus \left\{-5 - \sqrt{30}, -5 + \sqrt{30}\right\}$.	3p 2p
b)	$a = 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculând A^*, se obţine $A^* = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -1 & 11 \\ 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.	1p 4p
c)	$A \cdot X = B \Rightarrow$	1p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -1 & 11\\ 5 & 1 & -5\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-10 & -1 & 22\\ 10 & 1 & -10\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}.$	4p
2.	Utilizând relaţiile lui *Viete* $x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1$, atunci	1p
a)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=\left(-1\right)^2-2\cdot 1=$	2p
	$=-1<0$ rezultă că f nu are toate rădăcinile reale.	2p
b)	Se opoate observa uşor că $f\left(1\right)=0\Rightarrow x=1$ este o rădăcină reală a polinomului.	5p
c)	Rădăcinile polinomului satisfac ecuaţia $f\left(x\right)=0$.	1p
	$x_1^3+x_1^2+x_1-3=0$	
	$x_2^3+x_2^2+x_2-3=0$	2p
	$x_3^3+x_3^2+x_3-3=0$, adunând cele trei relaţii, obţinem	
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2}_{=-1}+\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{=-1}-9=0$, de unde	2p
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=11.$	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f\left(x\right)=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}=1-\frac{1}{x^2}.$	5p
b)	$f'\left(x\right)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{2}{x^3}\Rightarrow\begin{cases}f'\left(x\right)<0, \text{ dacă } x<0\\ f'\left(x\right)>0 \text{ dacă } x>0\end{cases}\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow f$ e descrescătoare, dacă $x<0$ şi e crescătoare dacă $x>0$.	2p
c)	$f\left(k\right)=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{\left(k-1\right)\left(k+1\right)}{k\cdot k}$	1p

www.mateinfo.ro

	$\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(2)\cdot f(3)\cdot\ldots\cdot f(n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot\cancel{3}}{2\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot 4}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{\cancel{n}\cdot n}=$	2p
	$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$	2p
2. a)	$F'(x)=f(x)=2^x+x^2>0\Rightarrow$	3p
	$\Rightarrow F$ este o funcţie crescătoare.	2p
b)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(2^x+x^2\right)dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_1^2=\frac{4}{\ln 2}+\frac{8}{3}-\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{3}=$	3p
	$=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}.$	2p
c)	$\int_1^2\left(f(x)+f(2x)\right)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_1^2 f(2x)dx$	
	$\int_1^2 f(2x)dx=\int_1^2\left(4^x+4x^2\right)dx=\left(\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{4x^3}{3}\right)\Big\|_1^2=$	3p
	$=\frac{16}{\ln 4}+\frac{4\cdot 8}{3}-\frac{4}{\ln 4}-\frac{4\cdot 1}{3}=\frac{12}{\ln 4}+\frac{28}{3},$	
	Din b) $\int_1^2 f(x)dx=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}$, atunci	
	$\int_1^2\left(f(x)+f(2x)\right)dx=\frac{2}{\ln 2}+\frac{7}{3}+\frac{12}{\ln 4}+\frac{28}{3}=\frac{2}{\ln 2}+\frac{12}{\ln 4}+\frac{35}{3}.$	2p

www.mateinfo.ro