

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 65**

Prof: RICU ILEANA

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$100^{\lg 2} = a \Rightarrow \left(\text{folosim operația de logaritmare} \right) \Rightarrow \lg 2 \cdot \lg 100 = \lg a \Rightarrow$ $2 \lg 2 = \lg a \Rightarrow \lg(2^2) = \lg a \Rightarrow a = 2^2 = 4$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ Finalizare: $A = 4 - 3 = 1 \in \mathbb{N}$	3p 1p 1p
2.	Ecuatia devine $\sqrt{1-x^2} = 1-x (*)$ Cond.ca radicalul sa fie corect definit: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;1] \\ x \in (-\infty;1] \end{cases} \Rightarrow x \in [-1;1]$ Ridicând la pătrat în ambii membri ai ec. (*) obținem $1-x^2 = 1-2x+x^2$ $\Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow S = \{0;1\}$	1p 2p 2p
3.	Graficul ei taie axa Oy în punctul 1 $\Leftrightarrow f(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$ $x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{4}{2a} \Rightarrow -\frac{4}{2a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow 4a = 12 \Rightarrow a = 3$ Finalizare: $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$	2p 2p 1p

4.	<p>Avem coordonatele punctelor $A(2;0); B(1;-1); C(1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\vec{i} + \vec{j} ; \overrightarrow{AB} = -\vec{i} - \vec{j}$</p> <p>Produsul scalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\vec{i} + \vec{j}) \cdot (-\vec{i} - \vec{j}) = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$</p> <p>Calculăm laturile: $BA = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2} ; CA = \sqrt{(2-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
5.	<p>$\frac{4}{m-1} = \frac{m+1}{2} \Rightarrow$</p> <p>$m^2 - 1 = 8 \Rightarrow m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \pm 3$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
6.	<p>$y - y_0 = m(x - x_0)$</p> <p>$m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$</p> <p>$y - 6 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$</p> <p>$5A = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$</p> <p>Finalizare</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
b)	<p>Verificare: $A^2 = 5A$ (conform pct.a); $A^3 = A^2 \cdot A = 5A \cdot A = 5A^2 = 5 \cdot 5A = 5^2 \cdot A$</p> <p>$P(k) \Rightarrow P(k+1): A^{k+1} = A^k \cdot A = 5^{k-1} A \cdot A = 5^{k-1} A^2 = 5^{k-1} \cdot 5A = 5^k \cdot A$</p> <p>$\Rightarrow P(n)$ adevarata $\forall n \in \mathbb{N}^*$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

c)	$A - A^2 + A^3 - \dots + (-1)^{99} A^{100} \stackrel{\text{folos. pct. b)}}{=} A - 5A + 5^2 A - 5^3 A + \dots + (-1)^{99} 5^{99} A =$ $= A \left(1 - 5 + 5^2 - 5^3 + \dots + (-1)^{99} 5^{99} \right) \stackrel{q=-5}{=} A \cdot \frac{(-5)^{100} - 1}{-5 - 1} = A \frac{5^{100} - 1}{-6} = -\frac{5^{100} - 1}{6} \cdot A$ <p>Finalizare: toate elementele matricei devin strict negative prin inmultirea elementelor din A cu o fractie negativa</p>	2p 2p 1p
2. a)	<p>Calculăm $2(x-3)(y-3) + 3 = 2(xy - 3x - 3y + 9) + 3 = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 = 2xy - 6x - 6y + 21 =$ $= x \circ y, \forall x, y \in \mathbb{R}$</p>	3p 2p
b)	$(x \circ y) \circ z = \left(\underset{\text{not. a}}{2xy - 6x - 6y + 21} \right) \circ z = a \circ z = 2az - 6a - 6z + 21 =$ $= 2(2xy - 6x - 6y + 21)z - 6(2xy - 6x - 6y + 21) - 6z + 21 = \quad (1)$ $= 4xyz - 12xy - 12xz - 12yz + 36x + 36y + 36z - 105, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \circ (y \circ z) = x \circ \left(\underset{\text{not. b}}{2yz - 6y - 6z + 21} \right) = x \circ b = 2xb - 6x - 6b + 21 =$ $= 2x(2yz - 6y - 6z + 21) - 6x - 6(2yz - 6y - 6z + 21) + 21 = \quad (2)$ $= 4xyz - 12xy - 12xz - 12yz + 36x + 36y + 36z - 105, \forall x, y \in \mathbb{R}$ <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow$ asociativitatea</p>	2p 2p 1p
c)	$x \circ x \stackrel{\text{cf. a)}}{=} 2(x-3)(x-3) + 3 = 2(x-3)^2 + 3$ $x \circ x \circ x \stackrel{\text{cf. b)}}{=} (x \circ x) \circ x = (2(x-3)^2 + 3) \circ x = 2(2(x-3)^2 + 3 - 3)(x-3) + 3 =$ $= 2 \cdot 2(x-3)^2(x-3) + 3 = 2^2(x-3)^3 + 3$ $\Rightarrow \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{den ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3 \text{ (dem. prin inducție matematică) (propoziția P(n))}$ <p>$P(k) \Rightarrow P(k+1)$</p>	1p 1p

	<p> $P(k+1): \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k+1\ ori} = \left(\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ k\ ori} \right) \circ x = \left(2^{k-1} (x-3)^k + 3 \right) \circ x = a \circ x = 2(a-3)(x-3) + 3 =$ $= 2 \left(2^{k-1} (x-3)^k + 3 - 3 \right) (x-3) + 3 = 2 \cdot 2^{k-1} (x-3)^k (x-3) + 3 = 2^k (x-3)^{k+1} + 3$ </p> <p>$\Rightarrow$ propozitia P(n) este adevărată</p> <p> Ecuația devine: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{de\ 2012\ ori} = 3 \Leftrightarrow 2^{2012-1} (x-3)^{2012} + 3 = 3 \Leftrightarrow 2^{2011} (x-3)^{2012} = 0 \Leftrightarrow$ $(x-3)^{2012} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_{2012} = 3 \Rightarrow$ </p> <p>Valoarea de adevar:fals</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
--	---	---------------------

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = e^x (4 - e^x) + e^x (-e^x) =$ $= e^x (4 - e^x - e^x) = e^x (4 - 2e^x) = 2e^x (2 - e^x)$	3p
b)	<p>Not cu d tangenta la curba C a funcției f în punctul P; cum $d \parallel Ox \Rightarrow m_d = m_{Ox} = 0$</p> <p>Dar $m_d = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot e^x (2 - e^x) = 0$</p> <p>$\Rightarrow e^x = 0$ (ecuația nu are soluții reale)</p> <p>Sau $2 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$</p> <p>Calculăm $f(\ln 2) = e^{\ln 2} (4 - e^{\ln 2}) = 2(4 - 2) = 4 \Rightarrow P(\ln 2; 4)$</p>	2p
c)	Studiem monotonia funcției f :	2p 1p

	$f'(x) = 2e^x(2 - e^x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0(4 - 0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty(4 - \infty) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$\ln 2$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">+++++0-----</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="3">0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ 4 ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ -∞</td></tr></table> <p style="text-align: center;">maxim</p> <p>$\Rightarrow$ monotonia lui $f \Rightarrow f(x) \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}$</p>	x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$	$f'(x)$	+++++0-----			$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ 4 ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ -∞			2p
x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$											
$f'(x)$	+++++0-----													
$f(x)$	0 ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ ↗ 4 ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ ↘ -∞													

c)	$V_{C_g} = \pi \int_1^e g^2(x) dx = \pi \int_1^e \frac{(\ln x - \ln^2 x)^2}{x} dx = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln^2 x}{x} - 2 \frac{\ln^3 x}{x} + \frac{\ln^4 x}{x} \right) dx = \pi (I_3 - 2I_4 + I_5)$ <p>Folosim metoda integrarii prin parti $\Rightarrow I_3 = \frac{1}{3}; I_4 = \frac{1}{4}; I_5 = \frac{1}{5} \Rightarrow$</p> $V_{C_g} = \pi (I_3 - 2I_4 + I_5) = \frac{\pi}{30}$	2p 3p
----	---	--------------