

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 66**

Prof: RICU ILEANA

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z_1 = \bar{z}_2 \Rightarrow (x+1) + yi = (y-1) - (x-4)i \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+1 = y-1 \\ y = -x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y = -2 \\ x+y = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$	2p 2p 1p
2.	<p>Stim ca functia de grad I este bijectiva $\Rightarrow f$ este inversabila</p> <p>f surjectiva $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y \Leftrightarrow 3x+6 = y \Leftrightarrow x = \frac{y-6}{3}$</p> <p>$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-6}{3}$ sau $f^{-1}(x) = \frac{x-6}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$</p> <p>$\Rightarrow 2m-1 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$</p>	2p 2p 1p
3.	<p>Cond.ca logaritmi să fie corect definiți:</p> $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; \infty)$ $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{x+1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = 2$ $x+1 = 2(x+2) \Leftrightarrow x = -3 \notin (-1; \infty)$	1p 2p 2p

4.	$T_5 = C_n^4 \left(\sqrt[3]{x} \right)^{n-4} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^4 = C_n^4 x^{\frac{n-4}{3}} \cdot x^{-4} = C_n^4 x^{\frac{n-16}{3}};$ $\Rightarrow \frac{n-16}{3} = 0 \Rightarrow n = 16$ <p>Finalizare: $A_{16}^2 = 16 \cdot 15 = 240$</p>	2p 2p 1p
5.	<p>Notăm $\vec{b} = x\vec{i} + y\vec{j}; x, y \in \mathbb{R}$</p> $ \vec{b} = 30 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 30 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 900 (1)$ $\vec{b} \text{ coliniar cu } \vec{a} \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{y}{-1} \Rightarrow x = -2\sqrt{2}y (2)$ <p>Înlocuim (2) în (1) $\Rightarrow y = \pm 10 \Rightarrow x = \mp 20\sqrt{2}$</p> <p>Finalizare: $\vec{b}_1 = -20\sqrt{2} \vec{i} + 10\vec{j}$ si $\vec{b}_2 = 20\sqrt{2} \vec{i} - 10\vec{j}$</p>	2p 2p 1p
6.	$f(x + \pi) = \cos 2(x + \pi) = 2\cos^2(x + \pi) - 1 = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x = f(x)$ $\Rightarrow f(x) - f(x + \pi) = f(x) - f(x) = 0.$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Not. cu $A \in G, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ și $AJ = JA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$</p>	3p
----------	--	----

	$\Rightarrow \begin{cases} -b = c \\ a = d \\ -d = -a \\ c = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$	2p
b)	<p>Fie $A \in G \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$ (conform pct.a)</p> <p>Calculăm $a \cdot I_2 + b \cdot J = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = A$</p>	2p 3p
c)	<p>Cum $X \in G \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$ (cf. pct.a) $\Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}$</p> <p>Ecuția $X^2 + J = O_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab + 1 \\ -2ab - 1 & a^2 - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+b)(a-b) = 0 \\ 2ab + 1 = 0 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow a=b$ sau $a=-b$</p> <p>Pentru $a=b \Rightarrow 2b^2 + 1 = 0$ (ec.nu are solutii reale)</p> <p>Pentru $a=-b \Rightarrow -2b^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ b_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$</p> <p>Avem $X_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$</p>	1p 2p 2p
2.	$x * 2 = 2x - 2x - 4 + 6 = 2$	2p
a)	$3 \circ x = 3x - 3(3+x) + 12 = 3$ $(x * 2) - (3 \circ x) = 2 - 3 = -1$	2p 1p
b)	$e_1 * x = x * e_1 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e_1(x-2) = 3(x-2), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e_1 = 3$	2p

	$e_2 \circ x = x \circ e_2 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e_2(x-3) = 4(x-3), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e_2 = 4$	2p
	$e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 \cdot e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 = (3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 6) + (12 - 3(3+4) + 12) = 4 + 3 = 7$	1p
c)	$f(x * y) = a(x * y) + 1 = a(xy - 2x - 2y + 6) + 1 = axy - 2ax - 2ay + 6a + 1(1)$ $f(x) \circ f(y) = f(x) \cdot f(y) - 3(f(x) + f(y)) + 12 = (ax+1)(ay+1) - 3(ax+1+ay+1) + 12 =$ $= a^2xy - 2ax - 2ay + 7(2)$ $\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ 6a + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0; a_2 = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow a=1$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	2p																									
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>e</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$1 - \ln x$</td><td></td><td></td><td>+++++++0-----</td><td></td></tr><tr><td>x^2</td><td></td><td></td><td>+++++++</td><td></td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td></td><td>+++++++0-----</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td></td><td>$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \frac{1}{e} \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	0	e	$+\infty$	$1 - \ln x$			+++++++0-----		x^2			+++++++		$f'(x)$			+++++++0-----		$f(x)$			$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \frac{1}{e} \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$		2p
x	$-\infty$	0	e	$+\infty$																							
$1 - \ln x$			+++++++0-----																								
x^2			+++++++																								
$f'(x)$			+++++++0-----																								
$f(x)$			$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \frac{1}{e} \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$																								
	$\Rightarrow$ monotonia lui f	1p																									
b)	<p>Asimptota orizontală: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ ecuatia asimptotei orizontale spre $+\infty$ este $y=0$</p>	2p																									

	<p>Asimptota verticală: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty \Rightarrow$ ecuația asimptotei verticale este $x=0$</p>	3p
c)	<p>Conform punctului a) $\Rightarrow$</p> $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, +\infty)$ <p>Conform punctului b) unde $y=0$ este ecuația asimptotei orizontale spre $\infty \Rightarrow$</p> $f(x) > 0, \forall x \in (e, +\infty)$ $\Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (e, +\infty)$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.	<p>$F'(x) = (x \cdot e^x)' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x =$</p> <p>a) $= e^x (1 + x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	<p>Observăm că $F(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1]$</p> $\Rightarrow S = \int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x \cdot e^x dx \underset{\text{prin parti}}{=} \\ = x \cdot e^x \Big _0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e - 0 - e^x \Big _0^1 = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
c)	$\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x \cdot e^x - (x+1)e^x}{e^x + 1} dx = - \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$ $= -\ln e^x + 1 \Big _0^1 = -\ln(e+1) + \ln 2 = \ln \frac{2}{e+1}$	<p>3p</p> <p>2p</p>