

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Varianta 127

Prof: Oláh Csaba

| SUBIECTUL I  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | (30 de puncte) |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1.           | <p>1</p> <p>(Ultima cifră a numărului <math>1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99</math> este 0, pentru că e multiplu de 10, atunci ultima cifră a numărului <math>1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 99 + 1</math> este 1)</p>                                                                                                                                      | 5p             |
| 2.           | <p>1</p> <p><math>(3654 \cdot 1236 - 1235 \cdot 3654 - 3653 = 3654 \cdot \underbrace{(1236 - 1235)}_{=1} - 3653 = 1)</math></p>                                                                                                                                                                                                                                        | 5p             |
| 3.           | <p>35km</p> <p>(Într-o oră primul biciclist face 15km, iar al doilea 20km, înseamnă că înainte cu o oră de a se întâlni, distanța dintre ei va fi <math>15\text{km} + 20\text{km} = 35\text{km}</math>)</p>                                                                                                                                                            | 5p             |
| 4.           | <p><math>x = 2</math></p> <p><math>(3ax - 12bx = 3x \cdot (a - 4b) = 3x \cdot 6 = 18x, \text{ atunci}</math></p> <p><math>3ax - 12bx = 36 \Leftrightarrow 18x = 36 \Rightarrow x = 2)</math></p>                                                                                                                                                                       | 5p             |
| 5.           | <p>8%</p> <p>(Dacă produsul costa, inițial <math>x</math> lei, atunci</p> <p>După scumpirea cu 20%: <math>\frac{120}{100}x = \frac{6x}{5}</math>, după ieftinirea din urmă, cu 10%:</p> <p><math>\frac{6x}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{54x}{50} = \frac{108x}{100}</math>, de unde se vede că prețul de după ieftinire e cu 8% mai mare față de prețul inițial.)</p> | 5p             |
| 6.           | <p>143</p> <p><math>(f(0) + f(1) + \dots + f(10) = 2 \cdot \underbrace{(0+1+\dots+10)}_{=55} + \underbrace{3+3+\dots+3}_{11\text{-ori}} =</math></p> <p><math>= 2 \cdot 55 + 11 \cdot 3 = 143)</math></p>                                                                                                                                                              | 5p             |
| SUBIECTUL II |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | (30 de         |

|               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | puncte)        |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1.            | $n(n+1)(n+2)$ este un produs de 3 numere consecutive, deci este divizibil cu 3, înseamnă că poate fi scris sub forma $n(n+1)(n+2) = 3k$ , $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \Rightarrow a = 3k+1$ nu e divizibil cu 3 (la împărțire dă restul 1).                                                                                      | 3p<br>2p       |
| 2.            | Desenează piramida<br><br>Se notează piramida.                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4p<br>1p       |
| 3.            | Primul număr prim este 2, deci suma primelor 20 de numere prime o să fie un număr impar (sumă de 19 numere impare plus un număr impar) rezultă nu se împarte la 2.                                                                                                                                                                 | 4p<br>1p       |
| 4.            | a) $c.m.m.c.[1, 2, 3] = 6$ , atunci lucrând 6 ore:<br><br>primul muncitor ar termina de 2 ori, al doilea de 3 ori iar al treilea de 6 ori lucrarea,<br><br>dacă ar lucra împreună 6 ore ar termina de $2+3+6=11$ -ori lucrarea, deci lucrarea ar termina în $\frac{6}{11}$ ore, adică în $\frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ minute. | 1p<br>2p<br>2p |
|               | b) dacă ar mai veni un muncitor, în 6 ore ar termina de $2+3+6+6=17$ ori lucrarea ar termina în $\frac{6}{17}$ ore, adică în $\frac{360}{17} = 21\frac{3}{17}$ minute.                                                                                                                                                             | 2p<br>3p       |
| 5             | Dacă în vârfuri sunt cuburile roșii, numărul cuburilor albe este $12+12+4\cdot 4+2\cdot 4=48$ , (12 pe două fețe opuse, 4 în centru și 2 pe margini pe restul de 4 fețe) care este și numărul total de cuburi albe, după enunțul problemei<br><br>Numărul cuburilor roșii: $125-48=77$ .                                           | 3p<br>2p       |
| SUBIECTUL III |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | (30 de puncte) |
| 1.            | a) dacă raza cercului înscris în triunghiul $AOB$ este $r$ , atunci                                                                                                                                                                                                                                                                | 5p             |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                               |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|    | $O_1O_2 = O_2O_3 = \dots O_6O_1 = 2r \Rightarrow O_1O_2O_3O_4O_5O_6$ este hexagon regulat.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                               |
|    | <p>b) <math>A_{O_1O_2O_3O_4O_5O_6} = 6 \cdot A_{OO_1O_2}</math>, <math>OO_1O_2</math> este triunghi echilateral, <math>O_1O_2 = 2r =</math></p> $= 2 \cdot \frac{12\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm } (r \text{ înseamnă o treime din înălțimea triunghiului } AOB)$ <p><math>A_{O_1O_2O_3O_4O_5O_6} = 6 \cdot A_{OO_1O_2} = 6 \cdot \frac{(O_1O_2)^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3} \text{ cm}^2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>1p</p> <p>1p</p> <p>3p</p> |
|    | <p>c) fie aria zonei hașurate din interiorul hexagonului <math>S_1</math>, iar cea din exteriorul hexagonului <math>S_2</math></p> $S_1 = 6 \cdot \frac{A_{AOB} - A_{C(O_1, r)}}{3} = 2(36\sqrt{3} - r^2\pi) = 2(36\sqrt{3} - (2\sqrt{3})^2\pi) =$ $= 2(36\sqrt{3} - 12\pi) = 24(3\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$ ( $S_1$ se compune din 6 "vârfuri" de triunghi, congruente - aria a trei „vârfuri” este egală cu diferența dintre aria triunghiului $AOB$ și a cercului înscris triunghiului $AOB$ ) <p><math>S_2</math> este diferența dintre aria cercului circumscris hexagonului <math>ABCDEF</math> (<math>144\pi \text{ cm}^2</math>) și aria hexagonului <math>ABCDEF</math> (<math>216\sqrt{3} \text{ cm}^2</math>) <math>AOB (= 36\sqrt{3} \text{ cm}^2)</math></p> $S_2 = 144\pi - 216\sqrt{3} = 72(2\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$ <p>Atunci</p> $\frac{S_1}{S_2} = \frac{24(3\sqrt{3} - \pi)}{72(2\pi - 3\sqrt{3})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} - \pi}{2\pi - 3\sqrt{3}} \left( \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{5,19 - 3,14}{6,28 - 5,19} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,05}{1,09} = 0,62 \right).$ | <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> |
| 2. | <p>a) <math>G_1G_2 = C'B + BF + FD' = 3 + 6 + 3 = 12 \text{ cm}</math></p> <p>înălțimea triunghiului <math>G_1G_2G_3</math> este <math>h = G_3G' = 2 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = 2\sqrt{3} \text{ cm}</math></p> $A_{G_1G_2G_3} = \frac{G_1G_2 \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                               |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
|  | <p>b) triunghiul <math>G_1G_2D</math> este dreptunghic în <math>G_2</math>, <math>G_1G_2 = 12\text{cm}</math>,</p> $G_2D = \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm},$ $G_1D = \sqrt{G_1G_2^2 + G_2D^2} = \sqrt{12^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12 \cdot 12 + 12} = \sqrt{3 \cdot 4 \cdot 12} = 2\sqrt{39}\text{cm}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>2p</p> <p>3p</p>           |
|  | <p>c) dacă <math>I</math> e centrul cercului înscris în triunghiul <math>G_1G_2G_3</math>, iar <math>r</math> este raza acestui cerc, atunci <math>r</math> o să fie înălțime pentru triunghiurile <math>G_1G_2I</math>, <math>G_2G_3I</math> și <math>G_3G_1I</math></p> $G_1G_2 = G_2G_3 = 2 \cdot BG_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{cm}$ $A_{G_1G_2G_3} = A_{G_1G_2I} + A_{G_2G_3I} + A_{G_3G_1I} = \frac{G_1G_2 \cdot r}{2} + \frac{G_2G_3 \cdot r}{2} + \frac{G_3G_1 \cdot r}{2} =$ $= \frac{r}{2} \cdot \left( \frac{G_1G_2}{=12} + \frac{G_2G_3}{=4\sqrt{3}} + \frac{G_3G_1}{=4\sqrt{3}} \right) = \frac{r}{2} (12 + 8\sqrt{3}) = 2r(3 + 2\sqrt{3}),$ <p>dar <math>A_{G_1G_2G_3} = 12\sqrt{3}\text{cm}^2 \Rightarrow 2r(3 + 2\sqrt{3}) = 12\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{12\sqrt{3}}{2(3 + 2\sqrt{3})} =</math></p> $= \frac{6\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \frac{36 - 18\sqrt{3}}{3} = (12 - 6\sqrt{3})\text{cm}.$ | <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> |