

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 19**

Prof: Ciocănar Viorica

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	<p>Numerele care îndeplinesc condiția din enunț sunt în progresie aritmetică având</p> $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \quad a_1 = 14, \quad r = 7, \quad a_n = 98 \quad \text{deci} \quad 98 = 14 + (n - 1)7 \Leftrightarrow n = 13.$ <p>Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \quad S_{13} = \frac{(14 + 98)13}{2} = 728.$</p>	3p 2p
2.	<p>$G_f \cap O_x = \{A, B\}, A \neq B$ dacă $\Delta > 0$. Când $m = 1$ funcția este de gradul I.</p> $\Delta = b^2 - 4ac = (3(m + 1))^2 - 8(m^2 - 1) = (m + 1)(9m + 9 - 8m + 8) = (m + 1)(m + 17)$ <p>$\Delta = 0$ conduce la soluțiile $m_1 = -1, m_2 = -17$.</p> <p>Pentru $\Delta > 0, m \in (-\infty, -17) \cup (-1, +\infty) - \{1\}$.</p>	1p 2p 2p
3.	<p>$(\sqrt[3]{2x+1})^3 = (x+1)^3.$</p> $2x+1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x = 0$ <p>$x(x^2 + 3x + 1) = 0$ de unde $x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac = 5, \quad x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$ deci</p> <p>$S = \{0, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\}.$</p>	1p 2p 2p
4.	<p>Formula $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad C_n^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!}, \quad C_n^6 = \frac{n!}{6!(n-6)!}, \quad 6 \leq n.$</p> <p>$\frac{n!}{3!(n-3)!} > \frac{n!}{6!(n-6)!}$ de unde se obține după simplificări $\frac{1}{(n-3)(n-4)(n-5)} > \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6},$</p> <p>$n < 9$ de unde $S = \{6, 7, 8\}.$</p>	2p 3p

5.	<p>Condiția de coliniaritate a doi vectori $\vec{t} = a \vec{i} + b \vec{j}$ și $\vec{r} = c \vec{i} + d \vec{j}$ este $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.</p> <p>$\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari dacă $\frac{2}{3} = \frac{a+2}{a-3} \Leftrightarrow 2(a-3) = 3(a+2) \Leftrightarrow a = -12$.</p>	2p 3p
6.	<p>Teorema sinusurilor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$</p> <p>$AB = c = 8, \sin C = \sin \frac{\pi}{3}$.</p> <p>După înlocuiri și calcule $\frac{c}{\sin C} = 2R, \frac{8}{\sin \frac{\pi}{3}} = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.</p>	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Pentru $p = 0$ $\det A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow A_0$ este inversabilă.</p> <p>Pentru $p = 1$ $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}, A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, A_0 + A_1^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$</p> <p>$\text{Tr}(A_0 + A_1^t) = 2 + 3 - 6 = -1$.</p>	2p 2p 1p
b)	<p>Din punctul a) $\det A_0 = -1 \Rightarrow \exists A^{-1}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, A^*$ matricea complementelor algebrici ai lui $A_0^t, A_0^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$</p> <p>Complementii algebrici sunt $A_{11} = -1, A_{12} = 1, A_{13} = 0, A_{21} = -6, A_{22} = 3, A_{23} = 2, A_{31} = -3, A_{32} = 2, A_{33} = 1$</p> <p>$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$</p>	3p 2p

c)	$\sum_{p=1}^n A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1+1 & 1-2 \\ 3 \cdot 1 & 1+1 & -2 \\ 2 \cdot 1+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2+1 & 2-2 \\ 3 \cdot 2 & 2+1 & -2 \\ 2 \cdot 2+3 & 1 & -3 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n-2 \\ 3n & n+1 & -2 \\ 2n+3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\sum_{p=1}^n A_p = \begin{pmatrix} n & \sum_{p=1}^n p + n & \sum_{p=1}^n p - 2n \\ 3 \sum_{p=1}^n p & \sum_{p=1}^n p + n & -2n \\ 2 \sum_{p=1}^n p + 3n & n & -3n \end{pmatrix} \quad \text{cu} \quad \sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$ $\Rightarrow \sum_{p=1}^n A_p = n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n+3}{2} & \frac{n-3}{2} \\ \frac{3(n+1)}{2} & \frac{n+3}{2} & -2 \\ \frac{n+4}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
2.	$f(1) = 1 + a + b + 3 + 1$ (1) , $f(-1) = 1 - a + b - 3 + 1$ (2) . a) Din relațiile (1) , (2) , $f(1) = 7$, $f(-1) = 5 \Rightarrow a + b = 2$, $-a + b = 6$ deci $a = -2$, $b = 4$. $f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.	1p 3p 1p
b)	$g \mid f$ dacă r din relația $f = gq + r$ este zero unde $f, g, q, r \in \mathbf{R}[X]$, $\text{grad } q = 2$, $\text{grad } r = 1$ $X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 + X + 1)q + r \Rightarrow$ restul este $(4 - b)x + 1 - b + a = 0$ deci $a = 3$, $b = 4 \Rightarrow f = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$	3p 2p
c)	$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$, $f(1 \pm \sqrt{2}) = (1 \pm \sqrt{2})^4 + a(1 \pm \sqrt{2})^3 + b(1 \pm \sqrt{2})^2 + 3(1 \pm \sqrt{2}) + 1 = 0$, f divizibil cu $(X - x_1)(X - x_2) \Rightarrow (X - x_1)(X - x_2) = (X - 1 - \sqrt{2})(X - 1 + \sqrt{2}) = X^2 - 2X - 1$, $X^4 + aX^3 + bX^2 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)q \Rightarrow (5a + 2b + 15)x + 2a + b + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$, $b = 0$ $\Rightarrow X^4 - 3X^3 + 3X + 1 = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - X - 1) \Rightarrow x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Ecuția tangentei la G_f în $M(x_M, y_M)$ $y - y_M = f'(x_M)(x - x_M)$, formula $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$</p> <p>$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)' = \frac{(2x - 2)(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 2x + 3)(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2}$, $f'(0) = \frac{5}{4}$.</p> <p>$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{4}x \Leftrightarrow 5x - 4y + 6 = 0$.</p>	2p 2p 1p
b)	<p>Pentru D, $f(x) \in [-1, 1]$.</p> <p>$-1 \leq \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \leq 1$ (1) și $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \geq -1$ (2).</p> <p>(1) $\Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2) = I_1$.</p> <p>(2) $\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x + 5}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) = I_2 \Rightarrow D = I_1 \cap I_2 = (-\infty, -1]$</p> <p>$g(-1) = \arcsin f(-1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.</p>	1p 1p 1p 2p
c)	<p>$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{3x - g(-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2}\right)^{3x - \frac{\pi}{2}}$.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty$.</p> <p>Nedeterminarea $1^{+\infty}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.</p> <p>$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} - 1\right)^{3x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}\right)^{3x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x+1}{x^2 - 3x + 2}\right)^{\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}}\right]^{\frac{(3x - \frac{\pi}{2})(x+1)}{x^2 - 3x + 2}} = e^3 \Rightarrow L = e^3$.</p>	1p 1p 1p 2p
2. a)	<p>$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ f, g derivabile cu derivatele continue (1)</p> <p>$\int_1^e xf(x)dx = \int_1^e x \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x\right)\Big _1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big _1^e$.</p>	2p 2p

	$\int_1^e x f(x) dx = \frac{e^2 + 1}{4}.$	1p
b)	$V = \pi \int_1^{e^2} g^2(x) dx, \quad g(x) = f(x) = \ln x$ $V = \pi \int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx, \text{ cu relația (1) din punctul a) } \Rightarrow$ $V = \pi \left[x(\ln x)^2 \Big _1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \ln x dx \right] \Rightarrow$ $V = \pi \left[x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x) \right] \Big _1^{e^2} = e - 2.$	1p 1p 1p 2p
c)	<p>cu relația (1) din punctul a) $\Rightarrow I_n = t(\ln t)^n \Big _1^x - n \int_1^x (\ln t)^{n-1} dt.$</p> $I_{n-1} = \int_1^x (\ln t)^{n-1} dt \Rightarrow I_n = x(\ln x)^n - n I_{n-1}.$ <p>Inducție după $n \Rightarrow I_1 = x \ln x - I_0 = x \ln x - x + 1$</p> $I_{n+1} = x(\ln x)^{n+1} - (n+1) I_n, \quad x > 1, n \in \mathbf{N}^*.$	2p 1p 2p