

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 20**

Prof: Ciocănar Viorica

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z \in \mathbf{C}, z = a + bi$, modulul lui $ z = \sqrt{a^2 + b^2}$, conjugatul lui z $\bar{z} = a - bi$. $z = \frac{3+2i}{1-3i} = \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-3+11i}{10}$ de unde $ z = \sqrt{\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{10}$.	3p 2p
2.	$f(f(x)) = 2f(x) - 1$ $f(f(x)) = 2(2x - 1) - 1 = 4x - 3$, $S = f(f(1)) + f(f(2)) + \dots + f(f(12)) = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 12) - 3 \cdot 12$ $S = 4 \cdot 6 \cdot 13 - 3 \cdot 12 = 276$ sau $f(f(1)) = 1$, $f(f(2)) = 5$, $f(f(3)) = 9, \dots$, $f(f(12)) = 45$ deci termeni în progresie aritmetică.	1p 2p 2p
3.	Condiții pentru radicalii de ordin par $x \geq 0, x \leq 3$ $(\sqrt{x} + \sqrt{3-x})^2 = 2^2$ de unde rezultă $3 + 2\sqrt{x(3-x)} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(3-x)} = 1$ $x(3-x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-1}}{2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2} \in [0, 3]$ de unde $S = \left\{ \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2} \right\}$.	1p 2p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale impare de două cifre $A = \{11, 13, \dots, 99\}$, card $A = 45$. Mulțimea multiplilor lui 3 $B = \{15, 21, 27, \dots, 99\}$, card $B = 15$ Probabilitatea ca numărul impar de două cifre să fie divizibil cu 3, $p = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.	2p 3p
5.	Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ și are panta cunoscută $y - y_0 = m(x - x_0)$, drepte paralele au pantele egale. $m_d = \frac{2}{3}$ atunci ecuația paralelei la d care trece prin $A(2, 1)$ este $y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow$ $2x - 3y - 1 = 0$.	2p 3p

6.	Dacă $a \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $\cos a < 0$, $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{4}{5}$.	2p
	$\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}$	1p
	$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$, $\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$, $\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{10}$ de unde $\operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5 \cdot 2}} = \frac{1}{3}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$d = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & 2m-1 & 3 \\ 1 & m & m-3 \end{vmatrix} \stackrel{l_3-l_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 1 & 2m-1 & 3 \\ 0 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = (m-5)(m-1).$ <p>$d = 0 \Rightarrow m = 5, m = 1.$</p> <p>$d \neq 0 \quad \forall m \in \mathbf{R} - \{1, 5\}.$</p>	2p
b)	<p>Pentru $m = 2$ $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$ $d = -3$ cu metoda lui Cramer $D_x = -3, D_y = 0, D_z = 0$,</p> <p>sistem compatibil determinat cu $S = \{(1, 0, 0)\}.$</p> <p>Pentru $m = 5$ $\begin{cases} x + 5y + 2z = 1 \\ x + 9y + 3z = 1 \\ x + 5y + 2z = 9 \end{cases}$ sistem incompatibil.</p>	3p 2p
c)	<p>Pentru $m = 1$ $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ Din punctul a) $d = 0$</p> <p>$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, necunoscute principale y și z, necunoscută secundară $x = \lambda$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} y + 2z = 1 - \lambda \\ y + 3z = 1 - \lambda \end{cases} \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 - \lambda & 3 \end{vmatrix} = 1 - \lambda, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 - \lambda \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad y = \frac{D_y}{\Delta_p}, \quad z = \frac{D_z}{\Delta_p},$</p>	1p 2p 2p

	sistemul este simplu nedeterminat cu $S = \{(\lambda, 1 - \lambda, 0)\}, \lambda \in \mathbf{R}$.	
2.	$A_x, A_y \in M \Rightarrow A_x \cdot A_y \in M$	1p
a)	$A_x \cdot A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = A_{x+y}, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$ $A_x \cdot A_x = A_{x+y} \in M$	3p 1p
b)	$\forall A_x, A_y, A_z \in M, (A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_x \cdot (A_y \cdot A_z)$ $(A_x \cdot A_y) \cdot A_z = A_{x+y} \cdot A_z = A_{x+y+z}, \quad A_x \cdot (A_y \cdot A_z) = A_x \cdot A_{y+z} = A_{x+y+z}, \quad \forall x, y, z \in \mathbf{R}.$ $A_1 \cdot A_4 \cdot A_9 \dots \cdot A_{n^2} = A_{1+4+\dots+n^2}, \quad \sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad A_{1+4+\dots+n^2} = A_{55} \Rightarrow$ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 55 \Leftrightarrow n(n+1)(2n+1) = 5 \cdot 6 \cdot 11 \Rightarrow n = 5$	3p 2p
c)	$\forall A_x \in M, \exists A_{x'} \in M \quad A_x \cdot A_{x'} = A_{x'} \cdot A_x = A_e \quad (1) \text{ unde } e \text{ este elementul neutru}$ $\exists A_e \in M, A_x \cdot A_e = A_e \cdot A_x = A_x \quad \forall A_x \in M, \text{ din punctul a) } A_x \cdot A_e = A_{x+e} = A_x \Rightarrow e = 0 \quad (2)$ $\text{În relația (1) înlocuind } e \text{ cu valoarea din relația (2) } \Rightarrow A_{x'} \cdot A_x = A_0 \Leftrightarrow x' + x = 0 \Leftrightarrow x' = -x$ $A_{x'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$\frac{x+1}{x-1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D = \mathbf{R} - [-1, 1]$	2p
a)	$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x-1} = \ln \frac{x-1}{x+1} = -\ln \frac{x+1}{x-1} = -f(x), \quad \forall x \in \mathbf{R} - [-1, 1] \text{ deci } f \text{ impară}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ecuația asimptotei orizontale la } \pm \infty.$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln \frac{x+1}{x-1} = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ ecuația asimptotei verticale la dreapta lui 1 și analog } x = -1$ $\text{ecuația asimptotei verticale la stânga lui } -1.$	2p 1p

b)	$S_n = f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \ln \frac{2+1}{2-1} + \ln \frac{3+1}{3-1} + \dots + \ln \frac{n+1}{n-1}.$ $S_n = \ln \frac{3}{1} + \ln \frac{4}{2} + \ln \frac{5}{3} + \dots + \ln \frac{n}{n-2} + \ln \frac{n+1}{n-1}.$ $\sum_{k=1}^n \ln a_k = \ln \prod_{k=1}^n a_k, \quad a_k > 0.$ $S_n = \ln \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n+1}{n-1} = \ln \frac{n(n+1)}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} S_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{n(n+1)}{2} = +\infty.$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	$L = \lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x-1} = 0 \Rightarrow \text{nedeterminarea } +\infty \cdot 0$ $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \text{nedeterminarea } \frac{0}{0}$ <p>Formulele $(\ln u)' = \frac{u'}{u}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$</p> $\text{Cu regula lui l'Hopital} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln \frac{x+1}{x-1})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2.$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2. a)	$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \int_0^x f(t^2) dt = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad g \text{ continuă} \Rightarrow g(x) = G(t) \big _0^x = G(x) - G(0).$ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^3}, \quad \text{nedeterminarea } \frac{0}{0} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(G(x) - G(0))'}{(x^3)'}$ $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos x^2}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{3} = \frac{1}{3}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
b)	$h(x) = e^{f(x)} \cos x = e^{\sin x} \cos x$ $\int h(x) dx = \int e^{\sin x} \cos x dx \quad (1)$ $(\sin x)' = \cos x \text{ deci } \sin x = t \quad (2)$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

	Din (1) și (2) $\Rightarrow \int e^t dt = e^t + c \Rightarrow \int h(x) dx = e^{\sin x} + c$	2p
c)	$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = [-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x)] \Big _0^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I_2 = \pi - 2.$ <p>Cu integrare prin părți $\Rightarrow I_n = -x^n \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-1} \cos x dx \Rightarrow$</p> $I_n = -x^n \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + n[x^{n-1} \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin x dx], \quad I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin x dx \Rightarrow$ $I_n = n\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1) I_{n-2}\right], \quad n \in \mathbf{N}^*$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>