

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 29

Prof: Gaga Loghin

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1-i\sqrt{3})^3 = (1-i\sqrt{3})^2 \cdot (1-i\sqrt{3}) = (-2-2i\sqrt{3}) \cdot (1-i\sqrt{3}) =$ $-2(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3}) = -2(1+3) = -8$ $\Rightarrow (1-i\sqrt{3})^3 = -8 \in \mathbb{Z}$	3p 2p
2.	<p>Ecuția admite soluții reale, dacă are $\Delta \geq 0$</p> $\Delta = (3a+1)^2 - 4a(a+3) = 9a^2 + 6a + 1 - 4a^2 - 12a = 5a^2 - 6a + 1 = (a-1)(5a-1)$ $\Delta \geq 0 \Rightarrow (a-1)(5a-1) \geq 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right] \cup [1, +\infty)$	1p 2p 2p
3.	<p>Condiții de existență: $\begin{cases} x-16 > 0 \\ \log_3(x-16) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 16 \\ x-16 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 16 \\ x > 17 \end{cases} \Rightarrow x \in (17, \infty)$</p> <p>Ecuția devine : $\log_3(x-16) = 2 \Leftrightarrow x-16 = 3^2 \Rightarrow x = 25; x = 5^2 \in \mathbb{Z}$, care este patrat perfect</p>	2p 3p
4.	<p>Notez cu x prețul inițial. Reducerea cu 20%: este $\frac{20}{100}x = \frac{20x}{100}$.</p> <p>Prețul după reducere: $x - \frac{20x}{100} = \frac{80x}{100}$. Scumpirea se face din acest preț.</p> <p>Scumpirea cu 15% este: $\frac{15}{100} \cdot \frac{80x}{100} = \frac{12x}{100}$</p> <p>Prețul după scumpire: $\frac{80x}{100} + \frac{12x}{100} = \frac{92x}{100}$</p>	1p 1p 1p 1p

	$\frac{92x}{100} = 575 \Rightarrow x = 625 \text{ lei}$	1p
5.	<p>Înălțimea di C este perpendiculară pe AB</p> <p>Știm că, între pantele m și m_1 a două drepte perpendiculare, există relația $m \cdot m_1 = -1$. În cazul nostru: $m_h \cdot m_{AB} = -1$; $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_h = -1$.</p> <p>Ecuția dreptei care trece prin punctul $C(-1,1)$ și are panta $m_h = 1$, este</p> <p>$y - 1 = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow y - 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
6.	<p>Observ că expresia seamănă cu formula: $2 \sin x \cos x = \sin 2x$. Completând, obținem:</p> <p>$E(x) = \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin x$</p> <p>Știm că $\sin x \in [-1, 1] \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow E_{\max} = \frac{1}{2}$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix};$ $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2.$	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	<p>Dacă $a \neq 1 \Rightarrow \text{rang} A = 3$; dacă $a = 1 \Rightarrow \text{rang} A = 1$</p> <p>Se observă că $\text{rang} A \neq 2$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Pentru $a \neq 1 \Rightarrow \text{rang} A = 3$, deci sistemul este compatibil determinat (Cramer)</p> $\Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 (a + 2) \Rightarrow x = \frac{\Delta_x}{\det A} = a + 2$	<p>2p</p> <p>3p</p>

	$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \Rightarrow y = \frac{\Delta_y}{\det A} = -1$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2 \Rightarrow z = \frac{\Delta_z}{\det A} = -1$	
2.	$\hat{2}x + \hat{4} = \hat{3} + \hat{1}$	2p
a)	$\Leftrightarrow \hat{2}x = \hat{4} \Rightarrow x = \hat{2}$	3p
b)	$\begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{1} + \hat{4} + \hat{3} - \hat{4} - \hat{3} - \hat{1} = \hat{1} + \hat{4} + \hat{3} + \hat{1} + \hat{2} + \hat{4}$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{4} \\ \hat{2} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{3} & \hat{1} & \hat{3} \end{vmatrix} = \hat{0}$	3p 2p
c)	$\begin{cases} \hat{3}x + y = \hat{4} \\ x + \hat{2}y = \hat{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{4}x + \hat{3}y = \hat{2} \\ x + \hat{2}y = \hat{3} \end{cases} . \text{ Adunăm cele 2 ecuații și obținem: } \hat{0} = \hat{0} . \text{ Rezultă}$ $S = \{(\hat{0}, \hat{4}); (\hat{1}, \hat{1}); (\hat{2}, \hat{3}); (\hat{3}, \hat{0}); (\hat{4}, \hat{2})\}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.		2p
a)	$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x)' \cdot (x-2) - (x^2 + 2x) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2}$ $f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x-2) - (x^2 + 2x)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2x - 4 - x^2 - 2x}{(x-2)^2}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 4}{(x-2)}$	2p 1p

b)	<p>Graficul funcției f poate să aibă, la $-\infty$, asimptotă orizontală sau verticală.</p> <p>Cercetăm dacă există asimptotă orizontală: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = -\infty$,</p> <p>deci nu există asimptotă orizontală.</p> <p>Cercetăm existența asimptotei oblice, care are ecuația $y = mx + n$, unde</p> $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}; n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$ $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = 1; n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 + 2x}{x - 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x - 2} = 4 \Rightarrow y = x + 4$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Punctele de extrem se află printre soluțiile derivatei I.</p> $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x - 4}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2(1 + \sqrt{2}); x_2 = 2(1 - \sqrt{2})$ <p>Pentru ca $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ să fie puncte de extreme trebuie ca x_1, x_2 să nu fie soluții și pentru derivata a doua.</p> $f''(x) = \frac{16}{(x - 2)^3}, \text{ care nu are soluții. Deci}$ <p>Punctele de extrem ale funcției f sunt: $V_1((2 + 2\sqrt{2}), (3 + 2\sqrt{2})); V_2((2 - 2\sqrt{2}), (3 - 2\sqrt{2}))$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
2. a)	<p>Pentru $n=3$ avem:</p> $\int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{(x^4 + 1)'}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\varphi'}{\varphi} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln \varphi + C$ $\Rightarrow \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{4} \cdot \ln x^4 + 1 + C; C \in \mathbb{R}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{\varphi'}{\varphi^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctg \varphi \Big _0^1 = \frac{1}{2} \arctg x^2 \Big _0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$	<p>2p</p> <p>3p</p>

	$I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx \stackrel{cf a)}{=} \frac{1}{4} \cdot \ln \varphi(x) \Big _0^1 = \frac{1}{4} \cdot \ln x^4+1 \Big _0^1 = \frac{\ln 2}{4}$	
c)	$\forall x \in [0,1], x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{x^4+1} \leq \frac{x^n}{x^4+1} \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^4+1} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x^4+1} \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n, \text{ adică } I_n \text{ șir descrescător}$ <p>Deoarece I_n șir descrescător, rezultă $I_1 > I_2 > I_3 \Leftrightarrow I_3 < I_2 < I_1 \Rightarrow I_2 \in \left(\frac{\ln 2}{4}, \frac{\pi}{8}\right)$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>