

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 30**

Prof: Gaga Loghin

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 + 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1 + x_2 + 2$ $a = 1, b = -m, c = -1; x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{1} = m; x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1$ <p>Înlocuind, $\Rightarrow m^2 - 2(-1) = m + 2 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Rightarrow m = 0; m = 1$</p>	3 p 2 p
2	<p>Metoda 1. Observ că șirul este format din suma numerelor naturale impare, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, pentru care avem relația: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$, unde n este numărul de numere.</p> <p>Deci $n = 2014$</p> <p>Metoda 2. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) = 2014^2$. Ni se sugerează suma unei progresii aritmetice: $x_{n-1} = 2n - 3, x_n = 2n - 1, x_{n+1} = 2n + 1; \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} = \frac{2n - 3 + 2n + 1}{2} = 2n - 1 = x_n$. Deci elementele șirului formează o progresie aritmetică, cu $x_1 = 1, x_2 = 3; r = x_2 - x_1 = 2$</p> $x_n = x_1 + (n - 1)r; S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n \Rightarrow 2014^2 = \frac{1 + 1 + (n - 1) \cdot 2}{2} \cdot n;$ $2014^2 = \frac{2(1 + n - 1)}{2} \cdot n \Rightarrow 2014^2 = n^2 \Rightarrow n = 2014$	1 p 2 p 2 p
3	<p>Metoda 1. $\sqrt{3} = \tan 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}; \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y = \cos(x + y)$</p> $\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \cdot \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 60^\circ \cdot \sin x - \cos 60^\circ \cdot \cos x = \cos 60^\circ \quad \cdot (-1)$	1 p 2 p 2

	$\Rightarrow \cos(60^\circ + x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} + x = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pi - \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ sau } \frac{\pi}{3} + x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \pi$ <p>Metoda 2. Ecuația se mai scrie: $\sqrt{3} \cdot \sin x = 1 + \cos x$; dar $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$, iar $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$</p> $\Rightarrow 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \right) = 0$ $\Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0; x = \pi, \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{x}{2} = 0, \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$	p
4	<p>Notez cu x prețul produsului. $x + \frac{24}{100}x = 372$</p> $\frac{124}{100}x = 372 \Rightarrow x = 372 \cdot \frac{100}{124}; x = 300$	2 p 3 p
5	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 3a - (a-1)(3a-1) = 0$ $\Leftrightarrow 3a - (3a^2 - 4a + 1) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 7a + 1 = 0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$	2 p 3 p
6	$S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ =$ $= \sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$ $= \sin^2 1^\circ + \sin^2 (90^\circ - 1^\circ) + \sin^2 2^\circ + \sin^2 (90^\circ - 2^\circ) + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 (90^\circ - 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$ $= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$ $= \underbrace{1+1+\dots+1}_{44 \text{ ori}} + \frac{1}{2} + 1 = 45 + \frac{1}{2} = \frac{91}{2}$	2 p 1 p 2 p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$A^3 = A^2 \cdot A$	1p
a)		2p

	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3$	2p
b)	$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A + A^t + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \text{ Se observă că toți determinanții de ordinal 2 sunt nuli și determinantul de ordinal } 1 \text{ este } d_1 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{rang } A + A^t + I_3 \text{ este } 1$	1p 1p 3p
c)	<p>Fie $B = A + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$</p> $\det(A + I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists (A + I_3)^{-1} \text{ și } B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^*.$ <p>Pentru a determina matricea adjunct, B^*, se construiește transpusa matricei, $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$</p> <p>Pe baza ei construim B^*, care este matricea complementelor algebrici ai matricei B^t:</p> $\delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0; \delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$	1p 1p 1p

	$\delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1} \cdot B^* = B^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	1p
2.	Fie $g = X^2 - 1$, cu soluțiile $x = 1, x = -1$.	2p
a)	$g \mid f \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2=0 \\ -a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ -a+b=0 \end{cases} \Rightarrow b=-1, a=-1$	3p
b)	$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Formez ecuația de gradul 2 care are rădăcinile x_1, x_2 și forma: $x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow g = X^2 - Sx + P$. $S = x_1 + x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1; P = x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 \Rightarrow g = X^2 - X + 1$ F și g au două rădăcini comune, deci $g \mid f$. efectuăm împărțirea și obținem restul $b - a = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow f = X^4 - 4X^3 + X - 4$	1p 2p 2p
c)	Petru $a=-4$, polinomul devine : $f = X^4 - 4X^3 + X - 4$ Calculăm expresia și obținem: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)^2 - 2x_1x_2x_3x_4(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots)}{(x_1x_2x_3x_4)^2}$ Relațiile lui Viète : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \dots = 0 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -1 \\ x_1x_2x_3x_4 = -4 \end{cases}$ Deci $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = \frac{16}{16} = 1$	1p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Calculăm derivata I. $f'(x) = \frac{(x^2 - x + 1)' \cdot (x + 1) - (x^2 - x + 1) \cdot (x + 1)'}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2}$</p> <p>$f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$</p> <p>Pentru $x \in (0, \infty)$ semnul derivatei I este: $f'(x) \leq 0$, pt. $x \in (0, -1 + \sqrt{3}) \Rightarrow f(x)$ descrescătoare</p> <p>$f'(x) > 0$, pt. $x \in (-1 + \sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f(x)$ crescătoare.</p>	2p 3p
b)	<p>$f''(x) = \frac{(2x + 2)(x + 1)^2 - (x^2 + 2x - 2) \cdot 2(x + 1)}{(x + 1)^4} =$</p> <p>$= \frac{2(x + 1)(x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x + 2)}{(x + 1)^4} = \frac{6}{(x + 1)^3} > 0$</p> <p>Deci $f(x)$ este strict convexă pentru $x \in (0, \infty)$</p>	1p 1p 1p 2p
c)	<p>Știm că $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ (inegalitatea mediei). Deoarece, $f(x)$ strict crescătoare,</p> <p>pe $(-1 + \sqrt{3}, \infty) \Rightarrow f(\sqrt{ab}) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$</p> <p>Deoarece $f(x)$ convexă pentru $x \in (-1 + \sqrt{3}, \infty)$, $\Rightarrow \frac{f(a) + f(b)}{2} \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.</p>	2p 1p 2p
2. a)	<p>$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{1+x^3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\varphi'}{\varphi} dx = \frac{1}{3} \ln \varphi \Big _1^3 =$</p> <p>$= \frac{1}{3} \ln 1+x^3 \Big _1^3 = \frac{1}{3} (\ln 28 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln 14$</p>	3p 2p

b)	$x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} < x^n \Leftrightarrow \frac{x^{n+1}}{1+x^3} < \frac{x^n}{1+x^3} \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3} dx < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3} dx < \lim_{n \rightarrow \infty} I_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3} dx$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ $\Rightarrow I_{n+1} < I_n, \text{ deci \u015fiurul este strict descresc\u0103tor.}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Conform punctului b), $I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$.</p> <p>Trec\u00e2nd la limit\u0103, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^3} dx < \lim_{n \rightarrow \infty} I_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^3} dx$</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$	<p>2p</p> <p>3p</p>