

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 43**

Prof: Marcu Ștefan Florin

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$ z = \frac{ 1+i ^{2014}}{ 1-i ^{2013}}$ $ 1+i = 1-i = \sqrt{2} \Rightarrow z = \sqrt{2}$	3p 2p
2.	$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$ $\Delta = -3 \Rightarrow y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4}$	2p 3p
3.	$x > 0$ $\log_2(x^2 + 1) = \log_2(2x)$ $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$	1p 2p 2p
4.	<p>Numerele de două cifre divizibile cu 5 sunt 10,15,...,95</p> <p>Avem 18 cazuri favorabile și 90 cazuri posibile $\Rightarrow P = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$</p>	2p 3p
5.	<p>Dacă notăm cu M mijlocul segmentului AB $\Rightarrow M(0,0)$</p> <p>Atunci $CM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$</p>	2p 3p

6.	$\sin C = \sin(A + B)$ $\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$ $= \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$I_2 + x \cdot A = \begin{pmatrix} 1-x & 2x \\ 2x & 1-4x \end{pmatrix}$ $\det(I_2 + x \cdot A) = 1 - 5x$ $1 - 5x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$	2p 2p 1p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$ $A^2 = -5A \Rightarrow A^2 + 5A = O_2$	3p 2p
c)	<p>Observăm că $A^n = (-5)^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$</p> <p>Atunci $A + A^2 + \dots + A^{2014} = (1 - 5 + 5^2 - \dots - 5^{2013})A =$</p> $= \frac{1 - 5^{2014}}{6} \cdot A$	1p 2p 2p
2. a)	<p>Din condițiile problemei, obținem $c = 1, 1 + a + b + c = 4, -1 + a - b + c = 0$</p> <p>Atunci $a + b = 2, a - b = 0$</p> <p>$a = b = c = 1$</p>	2p 2p 1p
b)	$f = X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X^2 + 1)$ $x_1 = -1, x_2 = i, x_3 = -i$	3p 2p

c)	Din relațiile lui Viète, avem : $x_1 + x_2 + x_3 = -a, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$	2p
	Atunci $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b < 0$	2p
	Dacă toate rădăcinile ar fi reale, am avea $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$, contradicție .	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$ Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	1p 2p 2p
b)	$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{x'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{x^2 + 1 - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} =$ $= \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} .$	2p 1p 2p
c)	Vom arăta că $f'(x) > 0, (\forall) x \in (-1, 1)$ Dar $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow 1 - x^2 > 0$ Deci $\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = f'(x) > 0$	2p 2p 1p
2. a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} dx =$ $= \int_0^1 (x + 1) dx =$	2p 2p

	$= \frac{3}{2}$	1p
b)	<p>Evident $\frac{x^n + nx + 1}{x + 1} > 0, (\forall)x \in (0, 1), n \in \mathbb{N} \Rightarrow I_n > 0$</p> <p>Din $x \in (0, 1) \Rightarrow x^n < 1$</p> <p>Atunci $\frac{x^n + nx + 1}{x + 1} < \frac{n + 2}{x + 1}$</p> <p>Integrând inegalitatea de mai sus $\Rightarrow I_n < (n + 2) \cdot \ln 2$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	<p>$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + (n+1)x + 1}{x+1} dx$</p> <p>$I_n + I_{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 2}{n+1} + (1-2n) \ln 2$</p> <p>$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (I_n + I_{n+1}) = 2 - 2 \ln 2$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>