

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 48

Prof: Badea Daniela

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a = \sum_{k=1}^{2012} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) =$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{2013}}$ $0 < a < 1 \Rightarrow [a] = 0$	2p 2p 1p
2.	$m = 1 \Rightarrow 1 \geq 0 \quad (\text{A})$ $m \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ (m-1)(5m-9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(1, \frac{9}{5}\right]$ $\Rightarrow m \in \left[1, \frac{9}{5}\right]$	1p 2p 1p
3.	$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow$ $x - \frac{\pi}{6} \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	3p 2p
4.	$n \in \mathbb{N}, n \geq 13$ $C_n^4 = C_n^{13} \Rightarrow$ $\Rightarrow n - 4 = 13 \Leftrightarrow n = 17$	1p 1p 3p
5.	<p>Fie $M(\alpha, \beta)$ a.î. $M \in d_m, (\forall) m \in \mathbb{R}$</p> $\Rightarrow m(2\alpha + \beta - 1) + (-\alpha + \beta + 5) = 0, (\forall) m \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 1 = 0 \\ -\alpha + \beta + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases} \Rightarrow M(2, -3)$	1p 2p 2p
6.	$\arccos \frac{12}{13} = x \Rightarrow \cos x = \frac{12}{13} \text{ și } x \in [0, \pi]$ $\Rightarrow \sin x > 0 \text{ și } x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = 3A$	1p 4p
b)	$A^n = 3^{n-1} \cdot A (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ Demonstrarea propoziției prin inducție	2p 3p
c)	$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2012} = (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2011}) \cdot A =$ $= \frac{3^{2012} - 1}{2} \cdot A$	2p 3p
2. a)	$A_x \cdot A_y = A_{x+y}$ finalizare	4p 1p
b)	$\cdot$ asociativă pe $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $G \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \cdot$ asociativă pe G I_3 element neutru pentru $\cdot$ în $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $I_3 = A_0 \in G$ $A_x = A_{-x} \in G$ $A_x \cdot A_y = A_{x+y} = A_{y+x} = A_y \cdot A_x$ finalizare	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f: \mathbb{Z} \rightarrow G, f(x) = A_x$ f morfism f injectivă f surjectivă	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f_2(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f_2'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ $f_2'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$	1p 1p																																				
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>$-\frac{1}{3}$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f_2'(x)$</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><td>$f_2(x)$</td><td>$-\infty$</td><td colspan="2">$\nearrow$</td><td>-1</td><td colspan="2">$\searrow$</td><td>$-\frac{31}{27}$</td><td colspan="2">$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$	$f_2'(x)$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		-1	$\searrow$		$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$		$+\infty$	2p
x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$																															
$f_2'(x)$	+	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+																						
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		-1	$\searrow$		$-\frac{31}{27}$	$\nearrow$		$+\infty$																												
	$\Rightarrow -1$ maxim local; $-\frac{1}{3}$ minim local	1p																																				
b)	$f_1(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f_1'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ $f_1'(x) > 0 \ (\forall) x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1$ strict crescătoare $\Rightarrow f_1$ injectivă	1p																																				

	$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \infty \\ f_1 \text{ continuă} \Rightarrow f_1 \text{ are pr. Darboux} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im } f_1 = \mathbb{R} \Rightarrow f_1 \text{ surjectivă}$ $\Rightarrow f_1 \text{ bijectivă} \Leftrightarrow f_1 \text{ inversabilă}$ $(f_1^{-1})'(2) = \frac{1}{f_1'(x_0)}, \text{ unde } f_1(x_0) = 2 \text{ care are soluția unică } x_0 = 1$ $(f_1^{-1})'(2) = \frac{1}{f_1'(1)} = \frac{1}{6}$	1p 1p 1p 1p
c)	<p>ecuația devine $x^3 + mx^2 - x + 1 = 0$; $x = 0$ nu este soluție</p> <p>Soluțiile ecuației date sunt aceleași cu ale ecuației $x + m - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$</p> <p>Fie $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + m$</p> <p>Utilizând șirul lui Rolle ecuația are trei soluții reale $\Leftrightarrow m \in (-\infty, -1]$</p>	1p 1p 1p 2p
2. a)	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}^2 x dx =$ $= \text{tg} x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} - x \Big _0^{\frac{\pi}{4}} =$ $= \frac{4 - \pi}{4}$	1p 3p 1p
b)	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \text{tg} x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \text{tg}^n x \leq 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \leq \ln(1 + \text{tg}^n x) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\pi \ln 2}{4} \Rightarrow (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ mărginit (1)}$ $\text{tg}^n x \geq \text{tg}^{n+1} x \quad (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ $\Rightarrow I_n \geq I_{n+1} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ descrescător (2)}$ $(1), (2) \Rightarrow (I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ convergent}$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ descrescător} \Rightarrow \max \{I_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = I_1$ $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \text{tg} x) dx. \text{ Făcând schimbarea de variabilă } \frac{\pi}{4} - x = y \text{ obținem } 2I_1 = \frac{\pi \ln 2}{4}$ $\Rightarrow I_1 = \frac{\pi \ln 2}{8}$	2p 3p 1p