

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 49**

Prof: Nicolaescu Nicolae

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(x) = 2 - 3(2 - 3x) = -4 + 9x$ $f(x)$ este crescătoare ($9 > 0$)	3p 2p
2.	$2^x + 2^{1-x} = 3 \Rightarrow 2^x + \frac{2}{2^x} = 3$ Notăm $2^x = y > 0$ Ecuația devine $y^2 - 3y + 2 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 2, y_2 = 1$ $2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1$ și $2^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0$	1p 2p 2p
3.	$C_6^1 = C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = 6, C_6^2 = C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15, C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$ $P = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{5}$	3p 2p
4.	$ z = 2 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4$ Ecuația $a^2 + b^2 = 4$ are în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ soluțiile $(2, 0), (-2, 0), (0, 2), (0, -2)$	2p 3p
5.	$m_{BC} = \frac{-2 - 6}{5 - 0} = \frac{-8}{5}$ $m_{BC} \cdot m_h = -1 \Rightarrow m_h = \frac{5}{8}$	1p 2p

	Ecuția înălțimii $y - 3 = \frac{5}{8}(x + 1) \Rightarrow 5x - 8y + 29 = 0$	2p
6.	$\sin x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \pm \frac{2\sqrt{10}}{7}$ <p>Deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x > 0$</p> $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{2\sqrt{10}}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12\sqrt{10}}{49}$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$\det A = \begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ a & b^2 & c \\ a & b & c^2 \end{vmatrix} = abc(abc + 2 - a - b - c)$	2p
a)	$abc + 2 - a - b - c = 0$ admite, de exemplu, ca soluție $a = b = c = 1$	3p
b)	<p>Sistemul devine $\begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ 2x + y + z = -1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y + z = -1 \\ 2x + y + z = -1 \end{cases}$. Minorul principal este $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$</p> <p>$x, y$ necunoscute principale și z necunoscută secundară și notăm $z = \alpha$</p> <p>Sistemul devine $\begin{cases} 4x + y = -1 - \alpha \\ 2x + y = -1 - \alpha \end{cases}$ cu soluția $x = 0, y = -1 - \alpha, z = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	$x = y = z = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b + c = -1 \\ a + b^2 + c = -1 \\ a + b + c^2 = -1 \end{cases}$ <p>Scăzând din prima ecuație pe cea de-a doua obținem $(a - b)(a + b - 1) = 0$</p> <p>I Dacă $a - b = 0 \Rightarrow a = b$. Din a doua ecuație $c = -1 - a - a^2$ și înlocuit în a treia ecuație</p>	<p>1p</p> <p>1p</p>

	$\Rightarrow a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 4a + 2 = 0 \Rightarrow (a+1)^2(a^2+2) = 0 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow a = b = c = -1$ <p>II Dacă $a + b = 1 \Rightarrow c^2 = -2$ din a treia ecuație fals!</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
2. a)	$(x * y) * z = \left(1 - (1-x)^{\log_2(1-y)}\right) * z = \left\{1 - \left[1 - (1-x)^{\log_2(1-y)}\right]^{\log_2(1-z)}\right\} = 1 - (1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}$ $x * (y * z) = x * \left(1 - (1-y)^{\log_2(1-z)}\right) = \left\{1 - (1-x)^{\log_2\left[1 - (1-y)^{\log_2(1-z)}\right]}\right\} = 1 - (1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)} =$ $= 1 - (1-x)^{\log_2(1-y)\log_2(1-z)}, \text{ deci legea este asociativă}$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
b)	<p>Legea este comutativă deoarece, dacă notăm $A = (1-x)^{\log_2(1-y)}$, $B = (1-y)^{\log_2(1-x)}$ și logaritmăm în baza 2 obținem $\log_2 A = \log_2 B$ și datorită injectivității funcției logaritmice $\log_2 A = \log_2 B \Rightarrow A = B \Rightarrow x * y = y * x$</p> $x * e = x \Rightarrow 1 - (1-x)^{\log_2(1-e)} = x \Rightarrow 1-x = (1-x)^{\log_2(1-e)}$ $\Rightarrow (x \neq 1) \log_2(1-e) = 1 \Rightarrow e = -1 \in (-\infty, 1)$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
c)	$x * x * x = 1 - (1-x)^{\log_2^2(1-x)} \text{ (am aplicat asociativitatea legii)}$ $x * x * x = 1 - (1-x)^{\log_2^2(1-x)} = x \Rightarrow 1-x = (1-x)^{\log_2^2(1-x)} \Rightarrow \log_2^2(1-x) = 1$ $\log_2(1-x) = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$x^4 - 4x + 3 = x^4 - x - 3x + 3 = x(x^3 - 1) - 3(x-1) = (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3) = (x-1)^2(x^2 + 2x + 3)$	2p
a)	<p>Cazul $\frac{0}{0}$</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{(x-1)^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)}{(x-1)^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + 2x + 3}{x-1} = \frac{6}{-0} = -\infty$	3p

b)	$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1) \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$	2p												
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>∞</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>-----</td><td>0</td><td>+++++</td></tr><tr><td>f(x)</td><td>$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$</td><td>$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	1	∞	f'(x)	-----	0	+++++	f(x)	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$		2p
x	$-\infty$	1	∞											
f'(x)	-----	0	+++++											
f(x)	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$												
	Deci f este descrescătoare pe $(-\infty, 1)$	1p												
c)	<p>Observăm că $m > 0$ deoarece in caz contrar limita este $+\infty$</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{f(x)} - (mx^2 + n) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^4 - 4x + 3} - (mx^2 + n) =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x + 3 - m^2x^4 - 2mnx^2 - n^2}{\sqrt{x^4 - 4x + 3} + mx^2 + n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(1 - m^2) - 2mnx^2 - 4x + 3 - n^2}{x^2 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}} + m + \frac{n}{x^2} \right)}$ $1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = 1$ $\frac{-2n}{2} = 5 \Rightarrow n = -5$	2p												
		1p												
		2p												
2.	Fie $F : R \rightarrow R$ o primitivă a funcției f.													
	Atunci $F'(x) = f(x) = \ln(1 + e^x) > 0$	3p												
a)	Atunci f este crescătoare pe R	2p												
b)	<p>Notăm $u(x) = 1 + e^x = t$ Atunci $u(0) = 2, u(1) = 1 + e$ $e^x dx = dt$</p> <p>Integrala devine $\int_0^1 \ln(1 + e^x) e^x dx = \int_2^{e+1} \ln t dt = t \ln t \Big _2^{e+1} - \int_2^{e+1} 1 dt = (e + 1) \ln(e + 1) - 2 \ln 2 - t \Big _2^{e+1}$</p>	2p												
		2p												
		1p												

	Finalizare $I = (e+1)\ln(e+1) - 2\ln 2 + 1 - e$	
c)	<p>Fie $F(t)$ o primitivă a funcției f.</p> <p>Atunci $g(x) = F(t) \Big _0^{\ln x} = F(\ln x) - F(0)$</p> <p>$g'(x) = F'(\ln x) - 0 = f(\ln x) \cdot (\ln x)' = \ln(1 + e^{\ln x}) \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>