

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 50**

Prof: Nicolaescu Nicolae

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(2x + 3yi) - (y - xi) = 2 + i \Rightarrow (2x - y) + (x + 3y)i = 2 + i$ $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$ cu soluția $x = 1, y = 0$	2p 1p 2p
2.	$\log_3^2 x + \log_3 9x - 4 = 0 \Rightarrow \log_3^2 x + \log_3 9 + \log_3 x - 4 = 0 \Rightarrow \log_3^2 x + \log_3 x - 2 = 0$ Notăm $\log_3 x = y$ Ecuația devine $y^2 + y - 2 = 0$ cu soluțiile $y_1 = 1, y_2 = -2$ $\log_3 x = 1 \Rightarrow x_1 = 3, \log_3 x = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{9}$	2p 2p 1p
3.	$G_f \cap Ox = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m < 0 \Rightarrow m \in (0, 3)$	2p 3p
4.	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^8}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice cu rația $q = \frac{1}{3}$ $S = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^9 - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3^9 - 1}{2 \cdot 3^8}$	2p 3p
	$m_{AB} = \frac{2-a}{-4}, m_{CD} = \frac{-a}{2}$	2p

5.	$AB \perp CD \Rightarrow m_{AB} \cdot m_{CD} = -1$	1p
	$\frac{2-a}{-4} \cdot \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$	1p
	$a_1 = 4, a_2 = -2$	1p
6.	$\sin 135^\circ = \sin(180 - 45)^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	2p
	$\cos 150^\circ = -\cos(180 - 30)^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	2p
	$\frac{\sqrt{6} \sin 135^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2 \in \mathbb{Z}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Observăm că $M(x)M(y)=M(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}$	
	Înmulțirea matricelor este asociativă, deci asociativitatea este verificată pe G.	1p
	$M(x)M(y) = M(y)M(x) = M(x+y), \forall x,y \in \mathbb{R}$, deci înmulțirea matricelor este comutativă pe G	1p
	a) Deoarece $M(x)M(0) = M(0)M(x) = M(x), \forall x \in \mathbb{R}$, deci elementul neutru este $M(0) = I_2$	1p
	$M(x)M(-x) = M(-x)M(x) = M(0), \forall x \in \mathbb{R}$ deci orice element $M(x)$ este simetrizabil și simetricul său este $M(-x)$	1p
	Deci $(G, \cdot)$ grup abelian	1p
b)	Considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow G, f(x) = M(x)$ evident bijectivă	2p
	$f(x+y) = M(x+y) = M(x)M(y) = f(x)f(y)$ deci f izomorfism	2p
	Atunci $(\mathbb{R}, +) \simeq (G, \cdot)$	1p
c)	$M(x) \cdot M(2x) \cdot \dots \cdot M(2012x) = M(x+2x+\dots+2012x) = M(1006 \cdot 2013x)$	2p

	$\det(M(1006 \cdot 2013x)) = 30^{1006 \cdot 2013x}$ $30^{1006 \cdot 2013x} = 30^{2012} \Rightarrow x = \frac{2}{2013}$	2p 1p
2. a)	$g = X + \hat{3} = X - (-\hat{3}) = X - 2$ $f(2) = \hat{3} + \hat{3} + 4 = \hat{0} \Rightarrow g / f$	2p 3p
b)	$f = X^3 + 2X^2 + 4 = (X + \hat{3})(X^2 + 4X + \hat{3}) = (X + \hat{3})(X + \hat{3})(X + \hat{1})$ $f = (X + \hat{3})^2 (X + \hat{1})$ descompunerea lui f în $Z_5[X]$	4p 1p
c)	$(ax + \hat{b})^2 = 4x^2 + x + \hat{1} \Rightarrow a^2 x^2 + 2abx + \hat{b}^2 = 4x^2 + x + \hat{1}$ $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \text{ sau } a = \hat{3}$ $a = 2 \Rightarrow 4\hat{b} = \hat{1} \Rightarrow \hat{b} = 4$ (prima soluție) $a = \hat{3} \Rightarrow \hat{b} = \hat{1}$ (a doua soluție)	2p 1p 1p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = e^x (ax^2 + bx + c + 2ax + b) = e^x [ax^2 + x(b + 2a) + b + c]$ $\begin{cases} a = 3 \\ b + 2a = 7 \\ b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$	2p 3p
b)	Studiem existența asimptotei orizontale $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (3x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x + 2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x + 1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{e^{-x}} = 0$	1p 3p 1p

	$y = 0$ asimptotă orizontală spre $-\infty$	
c)	$f(\ln x) = 6x \Rightarrow e^{\ln x} (3\ln^2 x + \ln x + 2) = 6x \Rightarrow x(3\ln^2 x + \ln x + 2) = 6x$ $3\ln^2 x + \ln x + 2 = 6 \Rightarrow 3\ln^2 x + \ln x - 4 = 0 \text{ cu soluțiile } 1 \text{ și } -\frac{4}{3}$ $\ln x = 1 \Rightarrow x_1 = e \quad \ln x = -\frac{4}{3} \Rightarrow x_2 = e^{-\frac{4}{3}}$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2.	f continuă pe $(-\infty, 0)$ și $(0, \infty)$	2p
a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 \sin x = 0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x+1) = 0, \quad f(0)=0 \text{ deci } f \text{ continuă în punctul } 0$ <p>Deci f continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
b)	$\int x^2 \sin x dx = \int x^2 (-\cos x)' dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x (\sin x)' dx$ $= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_1$ $\int \ln(x+1) dx = x \ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx = x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C_2$ $F(x) = \begin{cases} -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C_1, & x \leq 0 \\ x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C_2, & x > 0 \end{cases}$ <p>F admite primitive pe $\mathbb{R}$, deci F derivabilă pe $\mathbb{R} \Rightarrow F$ continuă pe $\mathbb{R} \Rightarrow F$ continuă în $0 \Rightarrow 2 + C_1 = C_2$</p> $F(0) = 1 \Rightarrow C_1 = -1 \Rightarrow C_2 = 1$ <p>Deci $F(x) = \begin{cases} -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x - 1, & x \leq 0 \\ x \ln(x+1) - x + \ln(x+1) + 1, & x > 0 \end{cases}$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
c)	<p>Cazul $\frac{0}{0}$</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2} \stackrel{l'Hospital}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x+1)}{2x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x+1}}{2} = \frac{1}{2}$	<p>1p</p> <p>4p</p>