

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 51**

Prof: Nicolaescu Nicolae

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$x^3 = \frac{x+5x+4}{2} \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$ $(x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -1, x_3 = 2$	2p 3p
2.	$A_n^3 = n, n \in N, n \geq 3 \Rightarrow n(n-1)(n-2) = 6n \Rightarrow n^2 - 3n - 4 = 0$ $n_1 = 4, n_2 = -1 \notin N$ $S = \{4\}$	2p 2p 1p
3.	<p>Condiții: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 5x+9 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{9}{5}, 3\right] = D$</p> <p>Ridicăm la pătrat ambii membri ai egalității $\Rightarrow 3-x+2\sqrt{(3-x)(5x+9)}+5x+9=4 \Rightarrow \sqrt{(3-x)(5x+9)}=2-2x$</p> <p>Ridicăm din nou la pătrat ambii membri ai egalității $9x^2-14x-23=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=\frac{23}{9} \in D$</p> <p>dar $x_2=\frac{23}{9}$ nu verifică ecuația deci $S=\{-1\}$</p>	1p 2p 2p
4.	$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-\frac{\pi}{4} \in \left\{\pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}+2k\pi, k \in Z\right\}$ $\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6}+2k\pi, k \in Z\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{5\pi}{12}+2k\pi, k \in Z\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi, k \in Z\right\}$	2p 2p 1p

	$x \in [0, 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12} \right\}$	
5.	$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \vec{AB} \cdot \vec{AD} \cdot \cos(\angle BAD)$ $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ $ \vec{AB} \cdot \vec{AD} \cdot \cos(\angle BAD) = 24 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	2p 2p 1p
6.	$-1 \leq x^2 + x + 1 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 \geq 0 \\ x^2 + x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in [-1, 0] \end{cases}$ În final $x \in [-1, 0]$	4p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$	2p
a)	$-3A = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ deci $A^2 = -3A \Rightarrow A \in M$	2p 1p
b)	Fie $A \in M \Rightarrow A^2 = -3A$ $\det A^2 = \det(-3A) \Rightarrow (\det A)^2 = 9 \det A$ deci $\det A = 0$ sau $\det A = 9$	1p 2p 2p
c)	$A^2 - \text{tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$ $-3A - \text{tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow -3A - \text{tr}A \cdot A = O_2 \Rightarrow (-3 - \text{tr}A)A = O_2$ $A \neq O_2$ deci $\text{tr}A = -3$	2p 2p 1p

2. a)	$m_{AB} = \frac{3-1}{2-(-1)} = \frac{2}{3}, m_{CD} = \frac{-2-0}{-2-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB \parallel CD \quad (1)$ $m_{BC} = \frac{0-3}{1-2} = 3, m_{AD} = \frac{-2-1}{-2-(-1)} = 3 \Rightarrow BC \parallel AD \quad (2)$ <p>Din (1) și (2) obținem că ABCD paralelogram</p>	2p 2p 1p
b)	$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC}$ $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7$	2p 3p
c)	<p>Ecuția dreptei BC: $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-3}{0-3} \Rightarrow 3x - y - 3 = 0 \Rightarrow M(\alpha, 3\alpha - 3)$</p> $ AM = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (3\alpha-4)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow 10\alpha^2 - 22\alpha + 17 = 5$ $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{6}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{2012}{x}} \cdot \frac{-2012}{x^2} = \frac{-2012}{x(x+2012)}$ $f''(x) = \frac{4024(x+1006)}{x^2(x+2012)^2} > 0$ <p>Deci f' crescătoare pe domeniul maxim de definiție</p>	2p 2p 1p
b)	<p>Cazul 1^∞ $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + f(n)]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right) \right]^{\frac{1}{\ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right)} \cdot n \ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right)}$</p>	2p

	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2012}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{Cazul } \frac{0}{0}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+2012} \cdot \frac{-2012}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2012n}{n+2012} = 2012$ <p>Rezultatul final este e^{2012}.</p>	2p 1p
c)	<p>f continuă pe $[1,2]$ și derivabilă pe $(1,2)$</p> <p>Aplicăm teorema lui Lagrange și rezultă că $\exists c \in (1,2)$ astfel încât $f(2) - f(1) = f'(c)$</p> $\ln(1007) - \ln(2013) = \frac{-2012}{c(c+2012)} \Rightarrow \frac{2012}{c(c+2012)} = -\ln \frac{1007}{2013}$	1p 1p 3p
2. a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2) dx = \left(x - x^3 \right) \Big _0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$	5p
b)	$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left[(1-3x^2)^n - (1-3x^2)^{n+1} \right] dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^n 3x^2 dx > 0$ <p>Deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și deoarece $(1-3x^2)^n \geq 0 \Rightarrow I_n \geq 0$ deci șirul este mărginit.</p> <p>Deoarece șirul este monoton și mărginit, rezultă $(I_n)_{n \geq 1}$ convergent</p>	2p 2p 1p
c)	$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^n x' dx = x(1-3x^2)^n \Big _0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - n \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x(1-3x^2)^{n-1} (-6x) dx$ $I_n = -2n \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (1-3x^2)^{n-1} (1-3x^2-1) dx \Rightarrow I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1} \Rightarrow I_n(2n+1) = 2nI_{n-1}$ $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{n-2} = \frac{4n^2-4n}{4n^2-1} I_{n-2}$	1p 2p 2p