

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 55

Prof: Oláh Csaba

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$r = 3$ rația progresiei, atunci $x = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$ $1 + 4 + 7 + \dots + 3n - 2 = \frac{n}{2} \cdot (3n - 1) \Rightarrow n(3n - 1) = 290, n = 10$ $x = 3n - 2 = 30 - 2 = 28.$	1p 2p 2p
2.	Din relațiile lui Viète $x_1 + x_2 = m + 1$ și $x_1 \cdot x_2 = m \Rightarrow m \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 1 \right) = m \frac{x_1 + x_2 - x_1 x_2}{x_1 x_2} =$ $= m \cdot \frac{m+1-m}{m} = 1$ nu depinde de m .	2p 3p
3.	Împărțind ecuația la $\sqrt{2}$, se obține $\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \sin \frac{\pi}{2}, x \in [0, 2\pi]$ atunci $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{150}^k (\sqrt{a})^{150-k} \left(\frac{4}{\sqrt[3]{a}} \right)^k = C_{150}^k a^{\frac{150-k}{2}} \cdot 4^k \cdot a^{\frac{-k}{3}} = C_{150}^k 4^k \cdot a^{\frac{450-5k}{6}}$, termenul nu conține $a \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{450-5k}{6} = 0 \Rightarrow 5k = 450 \Rightarrow k = 90,$ termenul fără a : $T_{91} = C_{150}^{90} 4^{90}$.	2p 1p 2p
5.	$\begin{vmatrix} 1 & 2m+1 & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ 4 & 4m+1 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{l_2-l_1}{=} 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2m+1 & 1 \\ 1 & 8-2m & 0 \\ 3 & 2m & 0 \end{vmatrix} \stackrel{l_3-l_1}{=} 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 8-2m \\ 3 & 2m \end{vmatrix} = 0$	3p

	adică $8m = 24 \Rightarrow m = 3$	2p
6.	$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + 64} = \frac{1}{65} \Rightarrow$ $\begin{matrix} x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{65}}{65}. \end{matrix}$	3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	a)	$\det V(1,2,3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_2 - c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$ $= 2.$	4p 1p
	b)	$V(a,b,c) \cdot {}^tV(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix}.$	3p 2p
	c)	$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x \underbrace{(x^2 - 1)}_{= (x-1)(x+1)} - 2(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2),$ $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2 \Rightarrow \det V(1,1,-2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} c_1 = c_2 \end{matrix} = 0.$	3p 2p
2.	a)	$f(k) = k(k+3)(k+1)(k+2) = \left(\underbrace{k^2 + 3k}_{=t} \right) \left(\underbrace{k^2 + 3k + 2}_{=t} \right) = t(t+2) =$ $= t^2 + 2t > t^2, \text{ dar } t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1 < (t+1)^2,$ $(k^2 + 3k)^2 < f(k) < (k^2 + 3k + 1)^2 \Rightarrow f(k) \neq m^2, m \in \mathbb{Z}$	2p 3p 1p

b)	$f(k) = -1 \Leftrightarrow (k^2 + 3k)^2 + 2(k^2 + 3k) + 1 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (k^2 + 3k + 1)^2 = 0, \text{ de unde } k^2 + 3k + 1 = 0$ $k \in \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$	2p 1p 2p
c)	$\sum_{k=1}^n \frac{f(k)}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n k(k+3) = \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k =$ $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{3} + 3 \right) =$ $= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x-1)(x+3)(x+7)}{(x-1)(x-4)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x+3)(x+7)}{x-4} = \frac{-4 \cdot 4 \cdot 8}{-3} = \frac{128}{3}.$	2p 3p
b)	<p>Funcția f se scrie</p> $f(x) = (x-5)(x+7)(x-1)(x+3) = (x^2 + 2x - 35) \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{-t} \right) = (t-32)t =$ $= t^2 - \underset{=2 \cdot 16}{32}t + 16^2 - 16^2 = (t-16)^2 - 256 = (x^2 + 2x - 19)^2 - 256$ $f'(x) = 2(x^2 + 2x - 19)(2x + 2) = 4(x+1)(x^2 + 2x - 19)$ $f'(2) = 4 \cdot 3 \cdot (4 + 4 - 19) = -44 \cdot 3, \quad f(2) = -3 \cdot 5 \cdot 9 = -45 \cdot 3$ $\frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{-44 \cdot 3}{-45 \cdot 3} = \frac{44}{45}.$	3p 2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+1)(x^2 + 2x - 19) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, \text{ sau}$	2p

	$x^2 + 2x - 19 = 0, x_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{5}$ $x \in \{-1 - 2\sqrt{5}, -1, -1 + 2\sqrt{5}\}$ toate trei rădăcini sunt reale.	2p 1p
2. a)	$f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1 - x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{(x^2 + 1) - x^2}{x^2 - x + 1} =$ $= \frac{(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)}{x^2 - x + 1} = x^2 + x + 1$ $\int f(x) dx = \int (x^2 + x + 1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C.$	2p 1p 2p
b)	$H'(x) = h(x) = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2 + x + 1} > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow H \text{ este o funcție crescătoare.}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = (*)$ $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big _0^1 =$ $= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{3}}{\frac{\pi}{3}} - \frac{\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{2\sqrt{3}\pi}{18} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$ $(*) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big _0^1 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{11}{6} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$	1p 2p 1p 1p