

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 56**

Prof: Oláh Csaba

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^{100} = \left[\frac{(1+i)^2}{2i} \right]^{50} = (2i)^{50} = 2^{50} \left(\frac{i^2}{-1} \right)^{25} = -2^{50}, \text{ în mod similar}$ $(1-i)^{100} = -2^{50} \Rightarrow (1+i)^{100} + (1-i)^{100} = -2^{50} - 2^{50} = -2^{51} \in \mathbb{Z}.$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 4x - 7 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0, x_1 = 2, x_2 = 6$ $g(2) = 1 \text{ și } g(6) = 17$ <p>Punctele de întâlnire $A(2,1)$ și $B(6,17)$.</p>	2p 2p 1p
3.	$3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \left(= (3 + 2\sqrt{2})^{-1} \right), \text{ ecuația se poate scrie } (3 + 2\sqrt{2})^x + \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^x} = 2, \text{ dar}$ $(3 + 2\sqrt{2})^x + \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^x} \geq 2, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^x = (3 + 2\sqrt{2})^{-x} \Rightarrow x = -x, \text{ adică } x = 0.$	2p 3p
4.	<p>Cifre, numere prime, sunt 2, 3, 5, 7, numere de 3 cifre prime distincte $A_4^3 = 4! = 24$</p> <p>În total sunt 900 numere de 3 cifre</p> <p>Probabilitatea $p = \frac{24}{900} = \frac{2}{75}.$</p>	2p 1p 2p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = \vec{i} + (2m+1)\vec{j}, \vec{u} + \vec{v} = \sqrt{1 + (2m+1)^2} = \sqrt{4m^2 + 4m + 2}$ $ \vec{u} + \vec{v} = \sqrt{2} \Rightarrow 4m^2 + 4m + 2 = 2, \text{ adică } 4m(m+1) = 0 \text{ de unde}$	2p 2p

	$m \in \{-1, 0\}.$	1p
6.	$AB = 4 \cdot 3, BC = 4 \cdot 4$ iar $AC = 4 \cdot 5$, sunt numere pitagorice $\Rightarrow ABC$ este triunghi dreptunghic cu ipotenuza $AC = 20$, $R = \frac{AC}{2} = \frac{20}{2} = 10.$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A(m) = \begin{vmatrix} m-1 & -1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)$ $\text{rang} A(m) = 3 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$	3p 2p
b)	Socotind $A^{-1}(m)$ obținem $A^{-1}(m) = \frac{1}{m^2-1} \cdot \begin{pmatrix} m+1 & 1 & -1 \\ 0 & m-1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 \end{pmatrix}$ $A^{-1}(2) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$	3p 2p
c)	$\det[A(m) \cdot A(m-1)] = \det A(m) \cdot \det A(m-1) = (m-2)(m+1)(m-1)m =$ $= (m^2 - m - 2)(m^2 - m) = (m^2 - m)^2 - 2(m^2 - m) + 1 - 1 =$ $= (m^2 - m - 1)^2 - 1$ $\det[A(m) \cdot A(m-1)] = -1 \Leftrightarrow (m^2 - m - 1)^2 - 1 = -1, \text{ adică } m^2 - m - 1 = 0, \text{ de unde}$ $m_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, m_{3,4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$	1p 2p 2p
2. a)	Folosind relațiile lui Viète, putem scrie $\sum_{i=1}^5 x_i = 2, \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j = 6$, unde $x_i, i = \overline{1, 5}$ sunt rădăcinile polinomului	2p

	$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^5 x_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 5} x_i x_j = 4 - 12 = -8 < 0$, dacă toate x_i ar fi fost reale, rezultatul ar fi fost pozitiv, rezultă ca nu toate rădăcinile sunt reale.	2p 1p
b)	Aplicând schema lui <i>Horner</i> , se găsește rădăcina $x = 2$.	5p
c)	Tot cu schema lui <i>Horner</i> obținem $f = (X - 2)(X^4 + 6X^2 + 5)$ $X^4 + 6X^2 + 5 = X^4 + X^2 + 5X^2 + 5 = X^2(X^2 + 1) + 5(X^2 + 1) = (X^2 + 1)(X^2 + 5)$, deci $f = (X - 2)(X^2 + 1)(X^2 + 5)$, radacinile complexe $\pm i, \pm i\sqrt{5}$ toate patru diferite.	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x) = \frac{2x^2 + 8x + x + 4 - 4 + 1}{x + 4} = \frac{2x(x + 4)}{x + 4} + \frac{x + 4}{x + 4} - \frac{3}{x + 4} =$ $= 2x + 1 - \frac{3}{x + 4} \Rightarrow f'(x) = 2 + \frac{3}{(x + 4)^2} > 0$ f este crescătoare pe domeniul maxim de definiție.	1p 2p 2p
b)	Cum în a). $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x + 4} = 0$, $y = 2x + 1$ este ecuația asimptotei oblice Asimptota orizontală nu există iar asimptota verticală este $x = -4$.	3p 2p
c)	$\frac{f(x)}{2x} = \frac{1}{2x} \cdot \left(2x + 1 - \frac{3}{x + 4} \right) = 1 + \frac{1}{2x} - \frac{3}{2x^2 + 8x} = 1 + \frac{x + 1}{2x^2 + 8x},$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{2x} \right)^{2x+1} = 1^\infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{2x} \right)^{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{x + 1}{2x^2 + 8x} \right)^{\frac{2x^2 + 8x}{x+1}}}_{\rightarrow e} \right]^{\frac{x+1}{2x^2 + 8x} (2x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 8x}} =$	2p 1p 2p

	$= e.$	
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x+1}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left(x - \ln(1+x) \right) \Big _0^1 =$ $= 1 - \ln 2 = \ln \frac{e}{2}.$	3p 2p
b)	$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n - x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx =$ $= \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \frac{1}{n+1} - I_n.$	3p 2p
c)	<p>Folosind formula din b), se poate scrie</p> $I_6 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 + I_1 = \frac{10-12+15-20+30-60}{60} + \ln \frac{e}{2} = \ln \frac{e}{2} - \frac{37}{60}$ $= \ln \frac{e}{2} - \frac{37}{60}.$	3p 2p