BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 60

Prof: Păcurar Cornel-Cosmin

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_1+b_3=5$ și $b_3+b_5=20 \Leftrightarrow b_1\left(1+q^2\right)=5$ și $\Leftrightarrow b_1q^2\left(1+q^2\right)=20$	2p
	$\Rightarrow q^2=4 \Leftrightarrow q=\pm 2$	2p
	$q\succ 0 \Rightarrow q=2$	1p
2.	$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow a^2-8a+4\geq 0$	3p
	Finalizare: $a\in\left(-\infty,4-2\sqrt{3}\right]\cup\left[4+2\sqrt{3},+\infty\right)-\{0\}$	2p
3.	$2x-3\succ 0, x-1\succ 0, 5-2x\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$	1p
	$\ln\frac{4x^2-12x+9}{x-1}=\ln(5-2x)\Leftrightarrow 6x^2-19x+14=0$	2p
	$x_1=2\in\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right), x_2=\frac{7}{6}\notin\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$	2p
4.	$C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}, A_n^2=n(n-1)$	1p
	$\frac{n(n-1)}{2}+n(n-1)=63\Leftrightarrow n(n-1)=42$	3p
	$n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=7$	1p
5.	$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$	3p
		2p

www.mateinfo.ro

	$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=2011^2-2012^2\prec 0$ $\Rightarrow$ vectorii $\vec{v_1},\vec{v_2}$ formează un unghi obtuz	
6.	$C=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{AB}{\sin C}=2R$ $\sin C=\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ Finalizare: $R=6\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$	1p 2p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$a+1+1=5\Leftrightarrow a=3$ $4-1-3=b\Leftrightarrow b=0$ $2+3+4=9$ este adevărat	2p 2p 1p
b)	Sistemul este incompatibil dacă $\Delta=\begin{vmatrix}a&1&1\\2&3&4\\4&-1&-3\end{vmatrix}=0$ și $\Delta_c=\begin{vmatrix}5&1&1\\9&3&4\\b&-1&-3\end{vmatrix}\neq 0$ $\Rightarrow a=3, b\neq 0$	3p 2p
c)	Pentru $b=7$ avem sistemul $\begin{cases}ax+y+z=5\\2x+3y+4z=9\\4x-y-3z=7\end{cases}$ care este compatibil pentru orice $a\in\mathbb{R}$ $(0,11,-6)$ este soluția cu toate componentele întregi , $\forall a\in\mathbb{Z}$	3p 2p
2. a)	Rădăcinile întregi ale lui f se găsesc printre divizorii lui 10 $f(2)=0\Rightarrow x=2\in\mathbb{Z}$ e rădăcină a lui f	2p 3p

www.mateinfo.ro

b)	$x_1+x_2+...+x_5=2, x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5=-1$ $x_1^2+x_2^2+...+x_5^2=\left(x_1+x_2+...+x_5\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5\right)=2^2-2\cdot(-1)=6$ $\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_1-x_3\right)^2+\left(x_1-x_4\right)^2+\left(x_1-x_5\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+...+\left(x_4-x_5\right)^2=$ $=4\left(x_1^2+x_2^2+...+x_5^2\right)-2\left(x_1x_2+x_1x_3+...+x_4x_5\right)=18$	2p 1p 2p
c)	$f=(X-2)\left[\left(X^2-1\right)^2+(X+2)^2\right]$ $\left(x^2-1\right)^2+(x+2)^2\succ 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ are o singură soluție reală	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=3x^2+1001\succ 0, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ strict crescătoare $\Rightarrow f$ injectivă $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ și f este continuă,deci f surjectivă Va rezulta că ecuația $f(x)=y$ are soluție unică, $\forall y\in\mathbb{R}$	2p 2p 1p
b)	$h(x)=x^3+1001x-20014-\dfrac{1}{n+2012}$ $h(2)\prec 0, h(3)\succ 0\Rightarrow x_n\in(2;3)$ $x_{n+1}^3-x_n^3\prec 0\Rightarrow x_{n+1}-x_n\prec 0$ $\Rightarrow (x_n)$ convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in[2;3]$ $\left(x_n-2\right)\left(x_n^2+2x_n+1007\right)=\dfrac{1}{n+2012}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$	1p 1p 1p 2p
c)	$n\left(x_n-2\right)=\dfrac{n}{\left(x_n^2+2x_n+1007\right)\cdot(n+2012)}$	3p 2p

www.mateinfo.ro

	$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 2) = \dfrac{1}{1015}$	
2. a)	$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{2011}-1}{x-1}, x \neq 1 \\ 2011, x = 1 \end{cases}$ $x \prec 1 \Rightarrow x^{2011} - 1 \prec 0, x - 1 \prec 0 \Rightarrow \dfrac{x^{2011}-1}{x-1} \succ 0$ $x \succ 1 \Rightarrow x^{2011} - 1 \succ 0, x - 1 \succ \theta 0 \Rightarrow \dfrac{x^{2011}-1}{x-1} \succ 0$ $\Rightarrow F'(x) \succ 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 1p 1p 1p
b)	$F(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots + \dfrac{x^{2011}}{2011}$ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty, F$ continuă $\Rightarrow \text{Im} F = \mathbb{R} \Rightarrow F$ surjectivă Din a) $\Rightarrow F$ injectivă Deci F bijectivă	1p 2p 1p 1p
c)	Cu schimbarea de variabilă $F^{-1}(x) = t \Leftrightarrow x = F(t) \Rightarrow dx = f(t)dt$ $\int_0^a F^{-1}(x)dx = \int_0^1 tf(t)dt = \left(\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{3} + \ldots + \dfrac{t^{2013}}{2013}\right)\Big\|_0^1 =$ $= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2013}$	2p 2p 1p

www.mateinfo.ro