

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 61**

Prof: Pascotescu Camelia

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{49} + \sqrt[3]{-1000} + (\sqrt{3})^2 = \sqrt{7^2} + \sqrt[3]{(-10)^3} + 3 =$ $= 7 + (-10) + 3 = 0$	3p 2p
2.	<p>Din Relațiile lui Viète avem $x_1 + x_2 = -\frac{m}{1} = -m$ și $x_1 x_2 = \frac{-m+1}{1} = -m+1$</p> <p>Relația dată devine $-2m + (-m+1) = 3$</p> $m = -\frac{2}{3}$	2p 1p 2p
3.	$3^{4x} = 3^{x^2}$ $4x = x^2$ $x_1 = 0, x_2 = 4$	1p 2p 2p
4.	<p>Se impun condițiile $2x-1 \geq 0$ și $2-x \geq 0$, de unde $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$</p> <p>Ecuția devine $2x-1 = 4-4x+x^2$ cu soluțiile $x_1 = 1, x_2 = 5$</p> <p>Având în vedere că $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, soluția ecuației este $x = 1$</p>	2p 2p 1p
6.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{1}{9}$	2p 1p

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$	2p
--	----

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

<p>.</p> <p>a)</p> <p>Folosind Regula triunghiului:</p> $\det A = 4a + 3a^2 + 18 - 9a - 2a^2 - 12 =$ $= a^2 - 5a + 6$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>b)</p> <p>Matricea este inversabilă pentru $\det A \neq 0$</p> $\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{2, 3\}$ <p>A este inversabilă pentru $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
<p>c)</p> <p>$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow$ Sistem Cramer</p> <p>Sistemul are soluția unică $x = 0, y = 1, z = 0$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>2.</p> <p>a și b pot lua fiecare 5 valori.</p>	3p
<p>a)</p> <p>Obținem $5 \cdot 5 = 25$ matrice.</p>	2p
<p>b)</p> <p>Fie $A = \begin{pmatrix} \hat{0} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \hat{0} & c & d \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$.</p> <p>Atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} \hat{1} & a+c & d+ac+b \\ \hat{0} & \hat{1} & a+c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>c)</p> <p>Fie $X = \begin{pmatrix} \hat{0} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \in H$. Atunci $X^3 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3}a & \hat{3}a^2 + \hat{3}b \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{3}a \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.</p> <p>$X^3 = I_3 \Rightarrow \hat{3}a = 0 \Rightarrow a = \hat{0}$ și $\hat{3}a^2 + \hat{3}b = \hat{0} \xRightarrow{a=\hat{0}} \hat{3}b = 0 \Rightarrow b = \hat{0}$</p> <p>Deci $X = I_3 \in H$.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

1. a)	$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} =$ $= \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$	2p 3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ <p>Din tabelul de variație rezultă că f este strict crescătoare pe $(0; e^2)$ și strict descrescătoare pe $(e^2; \infty)$.</p>	2p 3p
c)	<p>Deoarece $3, 5 \in (0; e^2)$ și $3 < 5$, cum funcția este strict crescătoare pe $(0; e^2)$, avem $f(3) < f(5)$.</p> <p>Atunci $\frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sqrt{5} \ln 3 < \sqrt{3} \ln 5 \Rightarrow \ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}} \Rightarrow 3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$</p>	3p 2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln x^2 + 1 \Big _0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = (x - \arctg x) \Big _0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$	2p 3p
b)	$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}(x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 x^{2n} dx$ $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$	3p 2p
c)	<p>Deoarece $0 \leq \frac{x^{2n}}{x^2 + 1} \leq x^{2n}$, rezultă</p> $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{x^2 + 1} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{n+1}$ <p>Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, cu Criteriul cleștelui, deducem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.</p>	2p 1p 2p