

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 63**

Pof: Pascotescu Camelia

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$f(3) = (-1)^3 + (-2)^4$ $= -1 + 16 = 15$	3p 2p
2.	<p>Cu Formula radicalilor compuși $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1 =$</p> $= 2\sqrt{3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$	3p 2p
3.	<p>Funcția fiind injectivă și domeniul și codomeniul său având același număr de elemente, rezultă că funcția ia fiecare din valorile $-1, -2, -3$ exact o dată.</p> <p>Deci $f(1) + f(2) + f(3) = -1 + (-2) + (-3) = -6$</p>	3p 2p
4.	<p>Axa de simetrie a graficului este $x = -\frac{b}{2a}$ de unde obținem</p> $\frac{m+2}{6} = 1$ $m = 4$	2p 2p 1
5.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = \vec{i} - (2\vec{i} + 3\vec{j}) = -\vec{i} - 3\vec{j}$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = -\vec{i} + 4\vec{j} - (2\vec{i} + 3\vec{j}) = -3\vec{i} + \vec{j}$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1)(-3) + (-3) \cdot 1 = 0$, deci vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sunt perpendiculari.	2p 3p
6.	<p>Dacă M este mijlocul segmentului AC, atunci $M\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right) \Rightarrow M(0; -1)$.</p> <p>Mediana din B este dreapta d ce trece prin B și M, deci $d: \frac{x - x_B}{x_B - x_M} = \frac{y - y_B}{y_B - y_M}$</p> $d: x + y + 1 = 0$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.		
a)	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -1 & b \end{pmatrix}$ <p>Avem minorul de ordin doi $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0$, deci $\text{rang } A \geq 2$.</p> <p>Pentru ca $\text{rang } A = 2$ trebuie ca $\det A = -5b + 20 = 0 \Leftrightarrow b = 4$</p>	1p 2p 2p
b)	$\det A = 0, \Delta_p \neq 0, \Delta_c \neq 0$ $\left. \begin{aligned} \Delta_p &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \\ \Delta_c &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & a \end{vmatrix} = -5a + 20 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 4 \text{ și } a \in \mathbb{R} - \{4\}$	1p 2p 2p
c)	<p>Pentru $b = 4 \xRightarrow{a)} \det A = 0$</p> $\left. \begin{aligned} \Delta_p &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \neq 0 \\ \Delta_c &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & b \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{sistem compatibil nedeterminat pentru } a = 4, b = 4$ <p>Soluția sistemului: $x = \frac{3-3\alpha}{5}, y = \frac{1-\alpha}{5}, z = \alpha$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$.</p>	2p 3p
2.		
a)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a + \ln b \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab)$	3p 2p
b)	<p>Prin inducție, demonstrează că $A(a_1) \cdot A(a_2) \cdot \dots \cdot A(a_n) = A(a_1 a_2 \dots a_n)$ folosind a)</p> <p>Luând $n = 2011$ și $a_1 = a_2 = \dots = a_{2011} = a \Rightarrow (A(a))^{2011} = A(a^{2011})$</p>	3p 2p

c)	Considerăm funcția $f : (G, \cdot) \rightarrow ((0; \infty), \cdot)$, $f(A(a)) = a$.	1p
	$f(A(a)) = f(A(b)) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b$, deci f e injectivă.	1p
	Pentru orice $a \in (0; \infty)$ există $A(a) \in G$ cu $f(A(a)) = a$, deci f e surjectivă.	1p
	$f(A(a) \cdot A(b)) \stackrel{a)}{=} f(A(a \cdot b)) = a \cdot b$, deci f este morfism.	1p
	Fiind injectivă și surjectivă, funcția este bijectivă. Fiind și morfism, rezultă că e izomorfism, deci grupurile $(G, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \cdot)$ sunt izomorfe.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{(\ln^2 x)' x - \ln^2 x}{x^2},$	2p
	$f'(x) = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$	3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = e^2; f(1) = 0, f(e^2) = \frac{4}{e^2}.$ $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln^2 x}{x} = \frac{1}{0+} [\ln(+0)]^2 = \infty$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x} \stackrel{\infty, l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{x} \stackrel{\infty, l'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$ $f \text{ fiind continuă și deoarece pentru } x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0, \text{ rezultă } \text{Im } f = [0; \infty)$	2p 2p 1p
c)	$x = e^2$ punct de maxim local pe $(1; \infty)$. Rezultă $f(x) \leq f(e^2), \forall x > 1$. $\frac{\ln^2 x}{x} \leq \frac{4}{e^2} \Rightarrow e^2 \ln^2 x \leq 4x \Rightarrow (e \ln x)^2 \leq (2\sqrt{x})^2 \stackrel{e \ln x, 2\sqrt{x} \geq 0}{\Rightarrow} e \ln x \leq 2\sqrt{x}, \forall x \in (1; \infty)$	2p 3p

2. a)	$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$ $= (\operatorname{tg} x - x) \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} + I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{2n+2} x + \operatorname{tg}^{2n} x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^{2n} x (\operatorname{tg}^2 x + 1)) \, dx =$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\operatorname{tg}^{2n} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \stackrel{u(x)=\operatorname{tg} x}{=} \int_0^1 u^{2n} \, du = \frac{u^{2n+1}}{2n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{2n+1}$	2p 3p
c)	<p>Studiem monotonia șirului: $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\operatorname{tg}^{2n} x \cdot (\operatorname{tg}^2 x - 1)] \, dx \leq 0$</p> <p>$\operatorname{tg} 0 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^{2n} x \geq 0, (\operatorname{tg}^2 x - 1) \leq 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x (\operatorname{tg}^2 x - 1) \, dx \leq 0$,</p> <p>Deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n} x \, dx \geq 0 \Rightarrow 0 \leq I_n \leq I_1$, deci șirul e și mărginit.</p> <p>Conform Teoremei lui Weierstrass, șirul e convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$. Trecând la limită în relația de la b) rezultă $l + l = 0 \Rightarrow l = 0$, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent la 0.</p>	2p 2p 1p