

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 65

Prof: Pistică Lăcrămioara

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3 = a_1 q^2$, $a_4 = a_1 q^3$ $a_1 = \frac{27}{4}$, $q = -\frac{2}{3}$ $S_4 = a_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1} \Rightarrow S_4 = \frac{13}{4}$	2p 1p 2p
2.	$f(x) = y \Rightarrow x = \log_3(2^{y+1} - 1)$ $f^{-1} : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_3(2^{x+1} - 1)$	3p 2p
3.	Condiții de existență : $\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, \infty)$ ecuația devine : $2\sqrt{x+7} = 3\sqrt{x+2}$ $x = 2 \in [-2, \infty)$	2p 1p 2p
4.	$\{a, b, c\}$ cu $a \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $b, c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ $C_5^1 \cdot C_5^2 = 50$	2p 3p
5.	$C \in Oy \Rightarrow C(0, a) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a - 3$ $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \Delta \Rightarrow \Delta = 2$ se obțin punctele $C_1(0, 5)$ și $C_2(0, 1)$	2p 1p 2p
6.	$\operatorname{tg} 2b = \frac{2\operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg}^2 b} \Rightarrow \operatorname{tg} 2b = \frac{3}{4}$ $\operatorname{tg}(a + 2b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} 2b} \Rightarrow \operatorname{tg}(a + 2b) = 1 \Rightarrow a + 2b = 45^\circ$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.		
a)	$X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$ <p>Verificarea identității</p>	2p 3p
b)	$AX = XA \Rightarrow \begin{cases} b = 2c \\ c = a - d \end{cases}$ $X = \begin{pmatrix} a & 2(a-d) \\ a-d & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X) = -2a^2 + 5ad - 2d^2 \Rightarrow \det(X) = (2a-d)(2d-a)$ $X = \begin{pmatrix} a & -2a \\ -a & 2a \end{pmatrix} \text{ și } X = \begin{pmatrix} 2d & 2d \\ d & d \end{pmatrix}$	1p 2p 2p
c)	$\det(X^4) = \det(A) \Rightarrow \det(X) = 0$ <p>conform pct a) $X^2 = (a+d)X \Rightarrow X^4 = (a+d)^3 X$</p> $X^4 = A \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = d \Rightarrow c^4 = \frac{1}{9} \Rightarrow c = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a = 2c \end{cases}$ <p>soluțiile ecuației vor fi : $X = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$</p>	1p 1p 2p 2p
2.		
a)	$f: X-1 \Rightarrow f(1) = 0$ <p>verificarea condiției</p>	3p 2p
b)	<p>relațiile lui Viete $\Rightarrow s_1 = i, s_2 = 1+i, s_3 = 6-2i, s_4 = 4-4i$</p> <p>notând $T_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$ și adunând relațiile $f(x_i) = 0 \Rightarrow$</p> $T_4 + i \cdot T_3 + (1+i) \cdot T_2 - 2(3-i) \cdot T_1 + 4(4-4i) = 0$ $T_1 = s_1 = -i, T_2 = s_1^2 - 2s_2 = -3-2i$ <p>adunând relațiile $\frac{f(x_i)}{x_i} = 0 \Rightarrow$</p> $T_3 + i \cdot T_2 + (1+i) \cdot T_1 - 2(3-i) \cdot 4 + 4(4-4i) \cdot \frac{s_3}{s_4} = 0 \Rightarrow T_3 = 15-2i$ $T_4 = -19 \Rightarrow \text{Im}(T_4) = 0$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$f(1-i) = 0 \Rightarrow m = 2-i$ $f = (x-1)(x-1+i)(x^2+2x+4)$ $x_1 = 1, x_2 = 1-i, x_{3,4} = -1 \pm i\sqrt{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + 1$ $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ strict crescătoare pe } \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ injectivă}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}, f \text{ continuă} \Rightarrow \text{Im } f = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) \Rightarrow f \text{ nu este surjectivă}$	2p 1p 2p
b)	$Gf \cap Ox = \{A(-1, 0)\}$ $m = f'(-1) = \frac{1}{2}$ $\text{ecuația tangentei } y - y_A = m(x - x_A)$ $\text{înlocuind obținem } x - 2y + 1 = 0$	1p 1p 1p 2p
c)	$\text{asimptotă orizontală } y = -\frac{1}{2} \text{ spre } -\infty$ $\text{asimptotă oblică } y = 2x + \frac{1}{2} \text{ spre } \infty$ $\text{domeniul de definiție este } \mathbb{R} \Rightarrow \text{nu există asimptote verticale}$	2p 2p 1p
2. a)	$\int_0^1 f(x+2) \cdot e^x dx = \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot e^x dx$ $\int_0^1 (x^2 - 1) \cdot e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 1) \Big _0^1$ $\text{calculând } \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot e^x dx = -1$	1p 2p 2p
b)	$\Gamma_g = \int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 (x-1)e^{x^2-2x+1} dx = \int_0^2 (x-1) e^{x^2-2x+1} dx$ $\Gamma_g = \int_0^1 (-x+1)e^{x^2-2x+1} dx + \int_1^2 (x-1)e^{x^2-2x+1} dx$ $\text{realizăm schimbarea de variabilă } t = x^2 - 2x + 1$ $\text{calculând } \Gamma_g = e - 1$	2p 1p 1p 2p
c)	$\int_1^3 (x^2 - 4x + 3)^n dx = \int_1^3 ((x-2)^2 - 1)^n dx = \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt$ $f(x) = (x^2 - 1)^n \text{ este funcție pară}$ $\int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = 2 \cdot \int_0^1 (t^2 - 1)^n dt$	2p 1p 2p