

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 66

Prof: Pistică Lăcrămioara

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$4 < 5 < 8 \Rightarrow -3 < \log_{0,5} 5 < -2 \Rightarrow \lceil \log_{0,5} 5 \rceil = -3$ $ z = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ $z_1 = 4 - 3i, z_2 = -4 - 3i$	2p 1p 2p
2.	$S = -\frac{b}{a} = -m, P = \frac{c}{a} = m + 2$ $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -1 \Rightarrow \frac{S^2 - 2P}{P} = -1$ $m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow m \in \{-1, 2\}$	2p 1p 2p
3.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $x + \frac{\pi}{6} = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$	1p 2p 2p
4.	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\frac{1}{3} = \frac{1}{n-2} \Rightarrow n = 5$	2p 3p
5.	$-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8} \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \Rightarrow \text{latura} = \text{dist}(d_1, d_2)$ $\text{dist}(d_1, d_2) = \text{dist}(A, d_2) = \frac{ ax_A + by_A + 1 }{\sqrt{a^2 + b^2}}, A \in d_1$ alegând $A(1,1) \in d_1 \Rightarrow \text{latura} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{aria} = \frac{9}{4}$	1p 2p 2p
6.	$A = \frac{3\sin x}{2\sin x + 5\cos x} = \frac{3\sin x}{\cos x(2\sin x + 5)}$ $A = \frac{3\text{tg}x}{2\text{tg}x + 5} = \frac{2}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$\det(A) = 2 - 5a$	2p
a)	$\det(A) = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$ deci $\det(A) \neq 0 \Rightarrow X = O_3$ soluție unică	1p 2p
b)	$\det(A) = 2$ $A^* = \begin{pmatrix} -9 & 10 & -4 \\ 7 & -8 & 4 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $X = A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A^*$	1p 2p 2p
c)	$\det(A) = 2 - 5a \neq 0$ $d_x = 3(2 - 5a)$, $d_y = -2(2 - 5a)$, $d_z = 2 - 5a$ soluția va fi $(3, -2, 1)$	1p 2p 2p
2.	$B = \{f \in \mathbb{Z}_5[X] \mid f = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e, a \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{\hat{0}\}, b, c, d, e \in \mathbb{Z}_5\}$, $\text{card}B = 4 \cdot 5^4$	2p
a)	$A = \{f \in \mathbb{Z}_5[X] \mid f = X^4 + aX^3 + bX^2 + 4, a, b \in \mathbb{Z}_5\}$, $\text{card}A = 5^2$ $\text{prob} = 0,01$	2p 1p
b)	$f(2) = \hat{0} \Rightarrow \hat{3}a + 4b = \hat{0}$ $f(X + \hat{1}) = (X + 2) \cdot c + \hat{3} \Rightarrow f(4) = \hat{3} \Rightarrow 4a + b = \hat{3}$ obținem $a = 4$, $b = 2$	1p 2p 2p
c)	$f = X^4 + 4$ 5 este număr prim $\Rightarrow x^4 = \hat{1}, \forall x \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{\hat{0}\}$ (teorema lui Fermat) $f(x) = \hat{0}, \forall x \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{\hat{0}\} \Rightarrow f = (x + \hat{1})(x + 2)(x + \hat{3})(x + 4)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f'(x) = \frac{a(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$	2p
a)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ $a > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ pe $(-\infty, -1)$ respectiv $(1, \infty)$ și $f'(x) < 0$ pe $(-1, 1)$ $a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ pe $(-\infty, -1)$ respectiv $(1, \infty)$ și $f'(x) > 0$ pe $(-1, 1)$ deci $x = 1$ și $x = -1$ sunt puncte de extrem local	1p 2p

b)	$f(-1) = \frac{a+2}{2}$, $f(1) = \frac{2-a}{2}$ $a > 0 \Rightarrow \max = f(-1) = 3$ și $\min = f(1) = -1 \Rightarrow a = 4$ $a < 0 \Rightarrow \min = f(-1) = -1$ și $\max = f(1) = 3 \Rightarrow a = -4$	1p 2p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{\frac{1}{f'(x)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x(x^2+1)}{x^2-1}}$ limita este egală cu 0	3p 2p
2. a)	schimbarea de variabilă $t = x^2$ $I = \frac{e-1}{2}$	2p 2p 1p
b)	$g(x) = f(x) + \frac{e}{f(x)} = e^{x^2} + e^{1-x^2} \Rightarrow g'(x) = 2xe^{1-x^2} (e^{2x^2-1} - 1)$ $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x \in [0,1] \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leq g(x) \leq g(0)$, $g(0) = g(1) = \max$ înlocuind și integrând pe intervalul $[0,1]$ obținem relația cerută	2p 1p 1p 1p
c)	$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^{t^2}$ continuă $\Rightarrow f$ admite primitive Fie F o primitivă a lui f $\Rightarrow F$ derivabilă și $F' = f \Rightarrow \int_0^{x^2} f(t)dt = F(x^2) - F(0)$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{f(x)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(0)}{f(x)-1} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xF'(x^2)}{f'(x)} = 1$	1p 2p 2p