

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 67

Prof: Pistică Lăcrămioara

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_n = a_1 + (n-1)r$ $\begin{cases} r = 3a_1 \\ 2a_1 + 12r = 19 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
2.	$f(x) = ax + b$, $g(x) = cx + d$ din $f \circ g = g \circ f$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow ad + b = bc + d$ un exemplu este $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -3x + 4$	3p 2p
3.	$\log_3 2 < 1 \Rightarrow x^2 - x < x + 3$ $x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-1, 3)$ $x \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow x \in \{1, 2\}$	2p 2p 1p
4.	$\{12, 16, \dots, 96\} \Rightarrow 22$ numere divizibile cu 4 $\{12, 18, \dots, 96\} \Rightarrow 15$ numere divizibile cu 6 $\{12, 24, \dots, 96\} \Rightarrow 8$ numere divizibile cu 4 și cu 6 Deci vor fi 29 de numere divizibile cu 4 sau cu 6	1p 1p 1p 2p
5.	coordonatele mijlocului segmentului AB : $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ panta dreptei AB : $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$ panta mediatoarei : $m = -\frac{1}{m_{AB}} = 1$ ecuația mediatoarei : $y - y_M = m(x - x_M) \Rightarrow x - y = 0$	1p 1p 1p 2p
6.	$\frac{NA}{NC} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{5}{6} \left(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{5} \overrightarrow{DC} \right)$ $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{4}{5} \overrightarrow{DA} + \frac{1}{5} \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ $\Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{5}{6} \overrightarrow{DM} \Rightarrow$ vectorii sunt coliniari $\Rightarrow$ punctele sunt coliniare	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B^3 = O_3 \Rightarrow k=3$	2p 3p
b)	$A = 2I_2 + B$ și aplicând Binomul lui Newton obținem $A^n = 2^n I_2 + n \cdot 2^{n-1} B + n(n-1) \cdot 2^{n-3} B^2$ $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} & n(n+2) \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & n \cdot 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	$\det(A^k) = 8^k$ $\sum_{k=1}^n \det(A^k) = \sum_{k=1}^n 8^k = 8 \cdot \frac{8^n - 1}{7}$ $7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det(A^k) = 8^{1006} - 8 \Rightarrow 7 \cdot \sum_{k=1}^{1005} \det(A^k) \leq 8^{1006} \leq 9^{1006} = 3^{2012}$	1p 2p 2p
2. a)	$A^2 = 2A$ $X_a \cdot X_b = X_{a+b+2ab}$ $a > -\frac{1}{2}, b > -\frac{1}{2} \Rightarrow a + b + 2ab > -\frac{1}{2}$ din cele 2 relații $\Rightarrow X_a \cdot X_b \in G$	1p 2p 1p 1p
b)	f morfism $\Leftrightarrow f(X_a \cdot X_b) = f(X_a) + f(X_b), \forall X_a, X_b \in G$ f injectivă $\Leftrightarrow$ fie $X_a, X_b \in G \quad f(X_a) = f(X_b) \Rightarrow a = b$ f surjectivă $\Leftrightarrow f(X_a) = y \Rightarrow a = \frac{e^y - 1}{2} > -\frac{1}{2}$ deci f este izomorfism de grupuri	2p 1p 1p 1p
c)	$f\left(\frac{X_1}{2} \cdot \frac{X_3}{2} \cdot \frac{X_5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{X_{2n-1}}{2}\right) = f\left(\frac{X_1}{2}\right) + f\left(\frac{X_3}{2}\right) + f\left(\frac{X_5}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{X_{2n-1}}{2}\right)$ $f\left(\frac{X_{2k-1}}{2}\right) = \ln(2k)$ înlocuind obținem $f\left(\frac{X_1}{2} \cdot \frac{X_3}{2} \cdot \frac{X_5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{X_{2n-1}}{2}\right) = \ln(2^n \cdot n!) = f\left(\frac{X_{2^n \cdot n! - 1}}{2}\right)$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f \text{ strict crescătoare pe } \mathbb{R}$	2p 3p
b)	$f \text{ strict crescătoare} \Rightarrow f \text{ injectivă}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f \text{ continuă} \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ surjectivă}$ $f \text{ bijectivă} \Rightarrow f \text{ inversabilă} \Rightarrow g'(0) = \frac{1}{f'(x_0)}, f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ $g'(0) = 1$	1p 1p 2p 1p
c)	<p>egalitatea este verificată pentru $x = 0$ și $x = 1$</p> $x \in (0,1) \Rightarrow \begin{cases} x > x^2 \\ x^3 > x^4 \end{cases} \xrightarrow{f \text{ cresc}} \begin{cases} f(x) > f(x^2) \\ f(x^3) > f(x^4) \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(x^3) > f(x^2) + f(x^4)$ $x > 1 \Rightarrow \begin{cases} x < x^2 \\ x^3 < x^4 \end{cases} \xrightarrow{f \text{ cresc}} \begin{cases} f(x) < f(x^2) \\ f(x^3) < f(x^4) \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)$ $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x < x^2 \\ x^3 < x^4 \end{cases} \xrightarrow{f \text{ cresc}} \begin{cases} f(x) < f(x^2) \\ f(x^3) < f(x^4) \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(x^3) < f(x^2) + f(x^4)$ <p>deci soluțiile găsite sunt unice</p>	2p 1p 1p 1p
2. a)	<p>schimbarea de variabilă $t = x^4 + 1 \Rightarrow I_3 = \frac{\ln 2}{4}$</p> <p>schimbarea de variabilă $t = x^2 \Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{8}$</p>	2p 3p
b)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^4+1} dx \leq 0 \Rightarrow (I_n)_{n \geq 1} \text{ descrescător}$ $0 \leq I_n \leq I_1 \Rightarrow (I_n)_{n \geq 1} \text{ mărginit}$ <p>deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent</p> $\frac{x^n}{x^4+1} \leq x^n \text{ pentru } x \in [0,1] \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$	1p 1p 1p 1p 1p
c)	$I_{n+4} + I_n = \frac{1}{n+1}$ $\frac{1}{2(n-3)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n+1)} \Rightarrow \frac{n^k}{2(n-3)} \leq n^k \cdot I_n \leq \frac{n^k}{2(n+1)}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot I_n = \begin{cases} \infty & , k > 1 \\ \frac{1}{2} & , k = 1 \\ 0 & , k < 1 \end{cases}$	2p 2p 1p