

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 73

Prof: RICU ILEANA

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	<p>Notăm cu x cel mai mic unghi și rația prin $q \Rightarrow \begin{cases} x + xq + xq^2 + xq^3 = 360 \\ xq^3 = 9xq \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} x + xq + xq^2 + xq^3 = 360 \\ q^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + xq + xq^2 + xq^3 = 360 \\ q = \pm 3 \end{cases}$ pt.ca este vorba de masuri</p> <p>de unghiuri, $q = -3$ nu convine $\Rightarrow q = 3$ (inlocuim în prima ecuație) $\Rightarrow x \cdot 40 = 360 \Rightarrow x = 9$</p> <p>Finalizare: unghiurile sunt $9^\circ; 27^\circ; 81^\circ; 243^\circ$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.	<p>$\Delta = 1 \Rightarrow V\left(\frac{2m-1}{2m}; \frac{-1}{4m}\right)$</p> <p>Ecuația primei bisectoare: $y = x$ (notăm dreapta cu d)</p> <p>$V \in d \Leftrightarrow \frac{2m-1}{2m} = \frac{-1}{4m} \Rightarrow 4m^2 - m = 0 \Rightarrow m_1 = 0$ (nu convine); $m_2 = \frac{1}{4}$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
3.	<p>Notăm $\left[\frac{x+3}{4}\right] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x-2}{3} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 3k + 2(1)$</p> <p>Avem $k \leq \frac{x+3}{4} < k + 1/4 \Rightarrow 4k \leq x + 3 < 4k + 4 \xrightarrow{\text{folos. (1)}} 4k \leq 3k + 5 < 4k + 4 / -5$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} k \leq 5 \\ k > 1 \end{cases} \Rightarrow k \in \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow S = \{8, 11, 14, 17\}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
4.	<p>Not. $z = 1 + i\sqrt{3} \Rightarrow z = \sqrt{1+3} = 2$ și $\begin{cases} \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \varphi = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$</p> <p>$z^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right) (1)$</p> <p>Analog, pt. $z = 1 - i\sqrt{3}$ avem $z = 2, \varphi = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$</p> <p>$\Rightarrow z^n = 2^n \left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right) = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3}\right) (2)$</p> <p>Egalitatea devine:</p> <p>$2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right) + 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} - i \sin \frac{n\pi}{3}\right) = 2^n / : 2^n \neq 0 \left(\text{stim } 2^n > 0, \forall n \in \mathbb{Z}\right)$</p> <p>$\Rightarrow 2 \cos \frac{n\pi}{3} = 1 \Rightarrow \cos \frac{n\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \pm 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
5.	<p>$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, 0 \leq k \leq n \Rightarrow T_{k+1} = C_5^k (\sqrt{2})^{5-k}$</p> <p>Termenii dezvoltării sunt raționali $\Leftrightarrow$ exponentul $5-k$ este multiplu de nr.2 $\Rightarrow$</p>	2p

	$5 - k \in \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ Pentru $5 - k = 0 \Rightarrow k = 5 (k \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq k \leq 5) \Rightarrow T_6 = C_5^5 (\sqrt{2})^0 = 1$ Pentru $5 - k = 2 \Rightarrow k = 3 (k \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq k \leq 5) \Rightarrow T_4 = C_5^3 (\sqrt{2})^2 = 20$ Pentru $5 - k = 4 \Rightarrow k = 1 (k \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq k \leq 5) \Rightarrow T_2 = C_5^1 (\sqrt{2})^4 = 20$ Pentru $5 - k = 6 \Rightarrow k = -1 \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow T_2 + T_4 + T_6 = 41$	1p 1p 1p
6.	$PQ = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{10}; AC = \sqrt{37}; BC = \sqrt{29}$ Avem $AC > BC > AB \Rightarrow \sphericalangle B$ are măsura cea mai mare $\Rightarrow$ (cf. teor. cosinusului) $\cos B = \frac{\sqrt{290}}{290}$	3p 1p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$\Delta(x) = e^{2x^2+2x+2a} + 2e^{-x^2-x-a} - e^0 - e^0 - e^0 =$	3p
a)	$= e^{2(x^2+x+a)} + 2e^{-(x^2+x+a)} - 3$	2p
b)	$\Delta(x) = 0$ $not.e^{x^2+x+a} = t \Rightarrow t^2 + 2 \cdot \frac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = 1 \\ t_3 = -2 \end{cases}$ Avem (1) $e^{x^2+x+a} = 1 \Rightarrow x^2 + x + a = 0$; rădăcini reale strict negative $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4a \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{4} \\ S = -1 < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ Avem (2) $e^{x^2+x+a} = -2$; ecuația nu are soluții	3p 1p 1p
c)	Pentru $a=1 \Rightarrow \Delta(x) = e^{2(x^2+x+1)} + 2e^{-(x^2+x+1)} - 3$ $not.e^{x^2+x+1} = t \Rightarrow \Delta(t) = \frac{t^3 - 3t + 2}{t} = \frac{(t-1)^2(t+2)}{t}$	2p 2p 1p
2.	$x \perp (-1) = x + (-1) + 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$	2p
a)	$(-1) \perp x = (-1) + x + 1 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$	2p
	Finalizare	1p
b)	$(x \circ y) \circ z = (ax + by - 1) \circ z = a(ax + by - 1) + bz - 1 = a^2x + aby + bz - a - 1(1),$ $x \circ (y \circ z) = x \circ (ay + bz - 1) = ax + b(ay + bz - 1) - 1 = ax + aby + b^2z - b - 1(2),$ $\stackrel{(1)=(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} a^2 = a \\ b = b^2 \\ -a - 1 = -b - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0; a_2 = 1 \\ b_1 = 0; b_2 = 1 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 0 \text{ (nu convine)} \\ a = b = 1 \end{cases}$	2p 2p 1p
c)	$f(x \perp y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{Z}.$ $f(x \perp y) = f(x + y + 1) = x + y + 1 + 2 = x + y + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$ $f(x) \circ f(y) = f(x) + f(y) - 1 = x + 2 + y + 2 - 1 = x + y + 3, \forall x, y \in \mathbb{Z}.$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(x)=\begin{cases} x, x \in [0, +\infty) \\ \frac{mx}{2x+m}, x \in (-\infty, 0) \setminus \left\{-\frac{m}{2}\right\} \end{cases}$ <p>$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \Rightarrow f$ nu admite asimptotă orizontală spre $+\infty$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx}{2x+m} = \frac{m}{2}$, cu $m>0 \Rightarrow f$ admite asimptotă orizontală spre $-\infty$ cu ecuatia $y = \frac{m}{2}$</p> <p>Asimp.oblică:</p> <p>$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1; n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x) = 0 \Rightarrow y = x$ este ecuatia asimptotei oblice spre $+\infty$</p> <p>Asimptota verticala: $\begin{cases} l_s\left(-\frac{m}{2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{m}{2} \\ x < -\frac{m}{2}}} f(x) = \frac{-\frac{m^2}{2}}{0_-} = +\infty \\ l_d\left(-\frac{m}{2}\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{m}{2} \\ x > -\frac{m}{2}}} f(x) = \frac{-\frac{m^2}{2}}{0_+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{m}{2}$ este ecuația asimptotei verticale a funcției f</p>	1p 1p 1p 1p 1p															
b)	$f'(x)=\begin{cases} 1, x \in [0, +\infty) \\ \frac{m^2}{(2x+m)^2}, x \in (-\infty, 0) \setminus \left\{-\frac{m}{2}\right\} \end{cases}$ <p>Să dem.că f este derivabilă în</p> <p>$x_0 = 0$: $\begin{cases} f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\frac{mx}{2x+m}}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{mx}{x(2x+m)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{m}{2x+m} = \frac{m}{m} = 1 \\ f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = 1 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow f'(0) = 1$</p> <table><tr><td>$x$</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{m}{2}$</td><td>$0$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+++++</td><td>+++++1+++++</td><td></td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{m}{2} \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$</td><td>$-\infty \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow 0 \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$</td><td></td><td></td></tr></table> <p>$\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe domeniul de definiție</p>	x	$-\infty$	$-\frac{m}{2}$	0	$+\infty$	$f'(x)$	+++++	+++++1+++++			$f(x)$	$\frac{m}{2} \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow 0 \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$			2p 2p 1p
x	$-\infty$	$-\frac{m}{2}$	0	$+\infty$													
$f'(x)$	+++++	+++++1+++++															
$f(x)$	$\frac{m}{2} \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow 0 \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow +\infty$															
c)	<p>Din b) observăm că pentru $x \in \left(-\infty, -\frac{m}{2}\right)$ avem $f(x) > \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow f$ nu are soluții</p> <p>Pentru $x \in \left(-\frac{m}{2}, +\infty\right)$ valorile lui f sunt strict crescătoare de la $-\infty$ la $+\infty \Rightarrow f$ are o</p>	2p 3p															

	singura soluție reală situată în intervalul $\left(-\frac{m}{2}, +\infty\right)$, anume $x=0$	
2.		
a)	$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n (1 + tg^2 x) dx = \frac{(tgx)^{n+1}}{n+1} \Big _0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ <p>Calculăm $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$ și ținând seama de recurența de mai sus, obținem</p> $I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$	3p
b)	<p>Avem că $tg^n x \geq 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ prin integrare, obținem $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$</p> <p>Deoarece $tgx \leq 1, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \Rightarrow I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx)^n (tgx - 1) dx \leq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ sau</p> <p>$I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in \mathbb{N}$ deci șirul este descrescător. Atunci $0 \leq I_n \leq I_0, \forall n \in \mathbb{N}$, deci șirul este și mărginit. $\Rightarrow$ șir convergent</p>	2p 2p 1p
c)	<p>Deoarece $I_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ și folosind relația de recurență de la a) $\Rightarrow$</p> $\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} \geq I_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ sau } I_{n+2} \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N},$ <p>Atunci $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ și aplicând criteriul cleștelui $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$</p>	2p 1p 2p