

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 74****Prof: Șerban George-Florin**

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$ $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 = i^2 = -1$	3p 2p
2.	$f(1)=1$, $f(f(1))=1$ $f^{-1}(f(1))=1$ $f(f(1)) - f^{-1}(f(1)) = 1 - 1 = 0$	1p 2p 2p
3.	$8^x = 27$ $x = \log_8 27$	2 p 3 p
4.	Cazuri favorabile : 27 , 64 . Cazuri posibile : 10 , 11 , , 99 - sunt 90 cazuri posibile . $P(A) = \frac{nr(cazfav)}{nr(cazpos)} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p 3p
5.	$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{BC} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{i} + \vec{j} = 2 \cdot \vec{j}$ Lungimea vectorului $\overrightarrow{BC}$ este egala cu 2 .	2p 2p 1p
6.	$A_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{720}$	2p

$R = \frac{abc}{4S}$	1p
$R = \frac{126}{\sqrt{720}}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = 1 + a^2$ $\det A^3 = (1 + a^2)^3$ $\det A^3 = (1 + a^2)^3 = 1 + 3a^2 + 3a^4 + a^6$	2p 2p 1p
b)	$A^2 = \begin{pmatrix} 1-a^2 & -2a \\ 2a & 1-a^2 \end{pmatrix}, 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix}, (a^2 + 1) \cdot I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + 1 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix},$ $A^2 - 2 \cdot A + (a^2 + 1) \cdot I_2 = O_2$	3p 2p
c)	Matricea A este inversabilă deoarece $\det A = 1 + a^2 \neq 0$ $A^2 - 2 \cdot A + (a^2 + 1) \cdot I_2 = O_2$, înmulțesc cu A^{-1} $A - 2 \cdot I_2 + (a^2 + 1) \cdot A^{-1} = O_2$, $(a^2 + 1) \cdot A^{-1} - 2 \cdot I_2 = -A$	1p 2p 2p
2. a)	$R = f(-2)$ Teorema restului sau schema împărțirii . $f(-2) = -15 = R$	2 p 3p
b)	$f = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$, $f(-2) = -(2 + x_1) \cdot (2 + x_2) \cdot (2 + x_3)$ $(2 + x_1) \cdot (2 + x_2) \cdot (2 + x_3) = -f(-2) = 15$	3p 2p
c)	Dacă f ar avea rădăcini întregi acestea ar fi printre divizorii întregi a lui 5 , adică 1, -1, 5, -5. $f(1) = -6$, $f(-1) = -6$, $f(5) = 90$, $f(-5) = -150$. Deci f nu are rădăcini întregi .	2p 3 p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x^4}{(x^2 + 1)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$	1p 3p 1p
b)	$y = mx + n, \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$ $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{x^2 + 1} \right) = 0$ <p>$y = x$ este asimptotă oblică la ∞.</p>	1p 1p 1p 2p
c)	$f(n) \geq 1, \quad n^3 \geq n^2 + 1, \quad n^3 - n^2 \geq 1, \quad n^2(n-1) \geq 1 \text{ adevărat pentru orice } n \text{ natural}$ <p>diferit de 0 și 1. $f(1) = \frac{1}{2}$</p> $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) > \frac{1}{2} + 1 + 1 + \dots + 1 = \frac{1}{2} + n - 1 = n - \frac{1}{2}$ $a_{n+1} - a_n = f(n+1) > 0, \text{ șirul } a_n \text{ este strict crescător, deci are limită.}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$	1p 1p 1p 2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 y \cdot e^{y+1} dy \text{ am făcut schimbarea de variabilă } x-1=y$ $I_1 = \int_0^1 y \cdot e^{y+1} dy = \int_0^1 y \cdot (e^{y+1})' dy = e^2 - 0 - \int_0^1 e^{y+1} dy = e^2 - (e^2 - e) = e$ <p>Am aplicat integrarea prin părți.</p>	1p 3p 1p

b)	$I_n = \int_0^1 y^n \cdot (e^{y+1})' dy = e^2 - 0 - n \int_0^1 y^{n-1} \cdot e^{y+1} dy$ <p>Am aplicat integrarea prin părți .</p> $I_n = e^2 - n \int_0^1 y^{n-1} \cdot e^{y+1} dy = e^2 - n \cdot I_{n-1}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>3p</p>
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 y^n \cdot (y-1) \cdot e^{y+1} dy < 0$ <p>Șirul I_n este strict descrescător .</p> <p>Deci $I_n \leq I_1 = e$, $I_n \leq e$.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>