

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 76****Prof: Șerban George-Florin**

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_4 = \frac{26+16}{2} = 21, r = 21-16 = 5, a_1 = 6, a_n = a_1 + (n-1)r, a_{10} = 6 + 9 \cdot 5 = 51$ $S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \frac{(6 + 51) \cdot 10}{2} = 285$	3p 2p
2.	$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $\frac{-b}{2a} = 0, \frac{-\Delta}{4a} = 1$ <p>Punctul de maxim este $V(0,1)$</p>	1p 2p 2p
3.	<p>Condiție $x-5 > 0, x > 5, x \in (5, \infty)$</p> $x-5 = 2^2 = 4, x=9 \in (5, \infty)$ <p>$S = \{9\}$</p>	1p 2p 2p
4.	<p>$\overline{1bc} : \overline{102}, \overline{103}, \overline{104}, \overline{120}, \overline{123}, \overline{124}, \overline{130}, \overline{132}, \overline{134}, \overline{140}, \overline{142}, \overline{143}$</p> <p>adică $A_4^2 = 12$</p> <p>Avem în total $4 \cdot A_4^2 = 48$ numere.</p>	2p 3p
5.	<p>$M(x,y), (x-2)\vec{i} + (y+1)\vec{j} = 2 \cdot (-2-x)\vec{i} + 2 \cdot (3-y)\vec{j}$</p> <p>$x-2 = -4-2x, x = -\frac{2}{3}, y+1 = 6-2y, y = \frac{5}{3}, M\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$</p>	2p 3p
6.	$\cos^2 x = \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	2p

	$\cos^2 x = 1$, $\cos x > 0$,	1p
	$\cos x = 1$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x=0$ $S=\{0\}$.	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	det A=0 deoarece liniile 1 și 3 coincid .	2p
a)	$\det(A^{10}) = (\det A)^{10} = 0$	3p
b)	$A^2(x) = \begin{pmatrix} 2x^2 & 0 & 2x^2 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 2x^2 & 0 & 2x^2 \end{pmatrix} \in M_3(R)$ $A(x) + A^2(x) + A^3(x) + A^4(x) = \begin{pmatrix} S & 0 & S \\ 0 & T & 0 \\ S & 0 & S \end{pmatrix}$ <p>unde $S = x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 = x \cdot (1 + 2x + 4x^2 + 8x^3) = \frac{x \cdot [(2x)^4 - 1]}{2x - 1} = \frac{x \cdot (16x^4 - 1)}{2x - 1}$,</p> <p>dacă $x \neq \frac{1}{2}$, dacă $x = \frac{1}{2}$ atunci $S=2$. $T = x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{x \cdot (x^4 - 1)}{x - 1}$, dacă $x \neq 1$.</p> <p>Dacă $x=1$, $T=4$.</p>	1p 2p 1p 1p
c)	$\det(A(2) \cdot {}^tA(2)) = 0$ $A(2) \cdot {}^tA(2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ <p>Există un minor de ordinul 2 nenul $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 32$, $\text{rang}(A(2) \cdot {}^tA(2)) = 2$</p>	1p 2p 2p
2.	Aplic relațiile lui Viète : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,	1p
a)	$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0$	1p
	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$	2p

	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$	1p
b)	<p>Aplic teorema restului , $R = f(1+i)$</p> $R = f(1+i) = (1+i)^4 + 16 = (1+2i+i^2)^2 + 16 = -4 + 16 = 12$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	$f = x^4 + 16 = x^4 + 8x^2 + 16 - 8x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}x)^2$ $f = x^4 + 16 = (x^2 + 4 + 2\sqrt{2}x) \cdot (x^2 + 4 - 2\sqrt{2}x)$ <p>f este reducibil în $\mathbb{R}[x]$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = x' - (\arctg x)' = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ $f''(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{2x \cdot (x^2 + 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$	<p>2p</p> <p>3p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x' - (\arctg x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{x^2 + 1}}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{3}$ <p>Am aplicat regula lui L Hospital .</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	<p>ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul O (0,0) este :</p> $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$ $f(0) = 0, \quad f'(0) = 0.$ <p>y = 0 ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul O (0,0)</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
2. a)	$I_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 x' \arctg x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx \quad (\text{am aplicat integrarea prin părți})$ $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(2)$	<p>2p</p> <p>2p</p>

	$I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$	1p
b)	$I_1 = \int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 x \cdot \arctg x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arctg x dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx \text{ (am aplicat integrarea prin părți)}$ $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$ $I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}$	2p 1p
c)	<p>Folosim inegalitatea $\arctg x \leq x$, $\forall x \in [0,1]$</p> $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n \cdot (x-1) \cdot \arctg x dx < 0$, deci șirul I_n este strict descrescător , deci are limită $0 \leq \int_0^1 x^n \cdot (\arctg x) dx \leq \int_0^1 x^n \cdot x dx = \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \cdot f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0$	1p 1p 2p 1p