

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 77**

Prof: Soare Roxana

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Notăm $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow z = 2^{2012}$	3p 2p
2.	$\Delta = 49$ $x \in \left[-2, \frac{1}{3}\right] \cap \mathbb{Z}$ $x \in \{-2, -1, 0\}$	1p 2p 2p
3.	$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ $x + \frac{\pi}{3} \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$	1p 2p 2p
4.	Între 1 și 200 sunt $\left[\frac{200}{3}\right] = 66$ numere divizibile cu 3, $\left[\frac{200}{5}\right] = 40$ numere divizibile cu 5, $\left[\frac{200}{15}\right] = 13$ numere divizibile cu 15, deci de la 1 la 200 sunt $66 + 40 - 13 = 93$ numere divizibile cu 3 sau cu 5, deci $200 - 93 = 107$ nu sunt divizibile nici cu 3, nici cu 5.	2p 3p
5.	$(a + 1)(2a + 1) - (2a - 1)(3a + 1) = 0$ $a_1 = 1 - \sqrt{2}$ $a_2 = 1 + \sqrt{2}$	2p 3p

6.	$R = \frac{abc}{45}$	2p
	$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{455}$	2p
	$R = \frac{144}{\sqrt{455}}$	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$I_2 = A(0) \in G$	2p
	a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = A(2) \in G$	3p
b)	$A(a)A(b) = A(a+b-3ab)$	2p
	$a \neq \frac{1}{3}, b \neq \frac{1}{3} \Rightarrow a+b-3ab \neq \frac{1}{3} \Rightarrow A(a+b-3ab) \in G \Rightarrow G$ parte stabilă a lui $GL_2(\mathbb{R})$	1p
	$(A(a))^{-1} = A\left(\frac{a}{3a-1}\right) \in G$	2p
c)	$(A(a))^2 = A(2a-3a^2)$	1p
	$(A(a))^3 = A(9a^3-11a^2+3a)$	2p
	$a \in \{-1, 0, 2\}$	2p
2.	$Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$	1p
	a) $\hat{1}^4 = \hat{1}$	1p
	$\hat{2}^4 = \hat{1}$	1p
	$\hat{3}^4 = \hat{1}$	1p
	$\hat{4}^4 = \hat{1}$	1p
	b) $f(\bar{0}) = \bar{4}, f(\bar{1}) = \bar{0}, f(\bar{2}) = \bar{0}, f(\bar{3}) = \bar{0}, f(\bar{4}) = \bar{4}$, deci rădăcinile în Z_5 ale polinomului f sunt $\hat{1}, \hat{2}, \hat{2}, \hat{3}$	3p
		2p

c)	$X + \hat{4} f, (X + \hat{3})^2 f, X + \hat{2} f \Rightarrow$ $\Rightarrow f = \hat{2}(X + \hat{2})(X + \hat{3})^2(X + \hat{4})$	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală către $-\infty$ și către $+\infty$	2p
a)	f nu admite asimptote oblice	1p
	dreapta $x=-1$ este asimptotă verticală	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \ln \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}{\frac{1}{x^3}} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^6}{x^6 - 1} =$ $= -2$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
c)	$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)+1}{x(x-1)+1}$ $f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n) = \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} = \frac{2}{3}$	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
2.	$a_n = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$	2p
a)	$a_{n+1} - a_n = \ln \frac{n(n+2)^3}{(n+3)(n+1)^3} < 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ este șir strict descrescător. (1)}$ $a_n = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 0 \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1} \text{ mărginit inferior. (2)}$ <p>Din (1) și (2) $\Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ convergent.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>

b)	$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} =$ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2} =$ $= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right)^{n^2} =$ $= \ln e =$ $= 1$	1p 1p 1p 2p
c)	$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \ln \frac{2(n+1)}{n+2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \ln 2$	3p 2p