

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 78**

Prof: Soare Roxana

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\begin{cases} a_1 + 2r = 5 \\ a_1 + 5r = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases}$ $S_{100} = \frac{100(2a_1 + 99r)}{2} = 10000$	3p 2p
2.	$x_V = \frac{m+1}{2}$ $y_V = \frac{-m^2 + 2m + 7}{4}$ $\forall \in P: y = -x^2 + 2x + 1$	1p 2p 2p
3.	<p>C.E. $3x^2 - 2x + 8 \geq 0, 3x^2 - 2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}.$</p> <p>Notăm $3x^2 - 2x + 3 = y \geq 0$ și obținem: $\sqrt{y+5} + \sqrt{y} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{y(y+5)} = 2(10-y)$</p> <p>C.E $y \leq 10 \Rightarrow y \in [0,10]$</p> <p>Se obține $y = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3 = 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$</p> $x \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$	1p 2p 2p
4.	<p>$f(-2) = f(2) \Rightarrow$ definim funcții de pe o mulțime cu 4 elemente cu valori într-o mulțime cu 6 elemente</p> <p>Se pot defini $6^4=1296$ funcții.</p>	2p 3p

5.	M este punctul care împarte segmentul [BC] în raportul $\frac{2}{5}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$	2p 3p
6.	$\cos x = -\frac{12}{13}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 5$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ $d_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \operatorname{rang} A = 2.$	2p 2p 1p
b)	$d_{car} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{rang} \bar{A} = 2 = \operatorname{rang} A \Rightarrow$ sistem compatibil nedeterminat. Notăm $z = \alpha$ și obținem $x = 2 - 2\alpha, y = 1$	3p 2p
c)	Avem $ 2 - 2\alpha_0 + 1 + \alpha_0 \leq 3 \Leftrightarrow \alpha_0 - 3 \leq 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -3 \leq \alpha_0 - 3 \leq 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \leq \alpha_0 \leq 6 \Rightarrow$ sistemul are 7 soluții cu proprietatea $ x_0 + y_0 + z_0 \leq 3$	1p 2p 2p
2. a)	$x * y = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 =$ $= 2x(y - 3) - 6(y - 3) + 3 =$	1p 3p 1p

	$=2(x-3)(y-3)+3$	
b)	$(x * y) * z = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (1)$ $x * (y * z) = 4(x-3)(y-3)(z-3) + 3, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (2)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z), \forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow$ legea "*" este asociativă.	2p 2p 1p
c)	Prin inducție $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = 2^{n-1}(x-3)^n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = 2^{2011}(x-3)^{2012} + 3$ $2^{2011}(x-3)^{2012} + 3 = 2^{2011} + 3 \Rightarrow x \in \{2, 4\}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	$f_3'(x) = 3x^2 + 6x$	2p												
a)	$f_2(x) = x^2$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_3'(x)}{f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 6x}{x^2} = 3$	2p 1p												
b)	$f_n'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$ $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ <table><tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>∞</td></tr><tr><td>$f_n'(x)$</td><td>/</td><td>0</td><td>+++++</td></tr><tr><td>$f_n(x)$</td><td>/</td><td>↓</td><td>↑</td></tr></table> <p style="text-align: center;">min</p>	x	-1	0	∞	$f_n'(x)$	/	0	+++++	$f_n(x)$	/	↓	↑	2p 1p 2p
x	-1	0	∞											
$f_n'(x)$	/	0	+++++											
$f_n(x)$	/	↓	↑											
c)	$f_n''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} \geq 0 \forall x \in (-1, \infty), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $\Rightarrow f_n$ convexă pe $(-1, \infty), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$	3p 2p												
2.	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = (t^3 - 3t + 2)e^{3t}$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	2p												
a)	o primitivă a lui f . Atunci $F(x) = G(x) - G(0)$	2p												

	$\Rightarrow F'(x) = f(x) = (x^3 - 3x + 2)e^{3x}$	1p
b)	$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$ $x_3 = -2$ este punct de minim și $F \searrow$ pe intervalul $(-\infty, -2]$ și $F \nearrow$ pe $[-2, \infty)$	1p 1p 1p 2p
c)	$F''(x) = 3(x - 1)(x^2 + 2x - 1)e^{3x}$ Punctele de inflexiune sunt $x_1 = 1, x_2 = -1 - \sqrt{2}, x_3 = -1 + \sqrt{2}$	3p 2p