

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 79****Prof: Stan Adrian**

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(2 + \sqrt{3})^{-2} = 7 - 4\sqrt{3},$ $\sqrt{(4\sqrt{3} - 7)^2} = 7 - 4\sqrt{3}.$ $a = 0 \in \mathbb{Z};$	2p 2p 1p
2.	Din $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow$ $\frac{x^2 - 6 + 4x + 3}{2} = 3x \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 3\}.$	1p 2p 2p
3.	$-\frac{\Delta}{4a} = 1 \Leftrightarrow$ $-\frac{5m^2 + 10m + 9}{4m} = 1$ $\Rightarrow 5m^2 + 14m + 9 = 0 \Rightarrow m \in \left\{-\frac{9}{5}, -1\right\}$	1p 2p 2p
4.	Ecuția dată este echivalentă cu $2x^2 + 3x + 1 = 0.$ $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}.$	2p 3p
5.	Vectorii $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \frac{a-2}{-8} = \frac{-4}{a+2}$ Din $a^2 - 4 = 32 \Rightarrow a \in \{-6; 6\}.$	2p 3p
6.	Se scrie mai întâi ecuația dreptei (AB), după formula $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$ Rezultă, $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1-2} \Rightarrow x+y-1=0.$ Distanța de la punctul $C(4;3)$ la dreapta AB este dată de formula $d(C, AB) = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	1p 2p 2p

	și este egală cu $\frac{ 4+3-1 }{\sqrt{1+1}} = 3\sqrt{2}$.	
--	---	--

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$X(a) \cdot X(b) = (I_2 - aA)(I_2 - bA) = I_2 - bA - aA + abA^2 = I_2 - (a+b-ab)A = X(a+b-ab)$, deoarece $A^2 = A$; Cum $X(a) \cdot X(1) = X(a+1-a \cdot 1) = X(1), \forall a \in \mathbb{R}$ și $1 \in \{0;1;2;...;2014\} \Rightarrow$ $X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot ... \cdot X(2014) = X(1) = I_2 - A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix};$	2 p 3 p
b)	Cum $X(a) = I_2 - a \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5a & 2a \\ -10a & -4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5a & -2a \\ 10a & 1+4a \end{pmatrix}$. Atunci, $\det(X(a)) = \begin{vmatrix} 1-5a & -2a \\ 10a & 1+4a \end{vmatrix} = (1-5a)(1+4a) + 2a \cdot 10a = 1-a;$ $\det(X(a)) = 0 \Leftrightarrow 1-a = 0 \Rightarrow a = 1.$ Pentru $a = 1$ rezultă că există o singură matrice neinvertibilă;	2 p 2 p 1 p
c)	Dacă $X(a)$ este inversabilă, rezultă că există $(X(a))^{-1}$ astfel încât $X(a) \cdot (X(a))^{-1} = I_2$. Vom nota cu $X(b)$ pe $(X(a))^{-1}$ rezultând $X(a) \cdot X(b) = I_2 \Leftrightarrow X(a+b-ab) = I_2 \Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1-5(a+b-ab) & -2(a+b-ab) \\ 10(a+b-ab) & 1+4(a+b-ab) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+b-ab=0$ de unde rezultă că $b = \frac{a}{a-1};$ Așadar, pentru $b = \frac{a}{a-1}$ se obține inversa matricei $X(a)$ și anume $(X(a))^{-1} = X(b) = X\left(\frac{a}{a-1}\right).$	1 p 2 p 2 p
2. a)	$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ $g(X) = (X-i)(X+i).$	3 p 2 p
b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $g(X) = X^2 + 1 \Leftrightarrow f(i) = f(-i) = 0$ ceea ce este adevărat deoarece $f(i) = (i^2 + i + 1)^{10} + (i^2 + 1)^{10} + 1 = i^{10} + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Analog pentru $f(-i)$.	2 p 3 p

c)	$f(X) = (X^2 + X + 1)^{10} + (X^2 + 1)^{10} + 1 =$ $= C_{10}^0 (X^2 + 1)^{10} + C_{10}^1 (X^2 + 1)^9 \cdot X + C_{10}^2 (X^2 + 1)^8 \cdot X^2 + \dots + C_{10}^{10} X^{10} + (X^2 + 1)^{10} + 1 =$ $= 2(X^2 + 1)^{10} + 10(X^{19} + 9X^{17} + \dots) + \dots =$ <p>Observăm că a_{19} este coeficientul lui X^{19} prin urmare $a_{19} = 10$.</p>	2 p 2 p 1 p
----	--	------------------------------------

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = (2x - 4)e^{x^2 - 4x + 2};$ $f'(0) = -4e^2;$	3p 2p
b)	<p>f este crescătoare pe $[2; \infty)$ deoarece $f'(x) > 0$ și este descrescătoare pe $(-\infty; 2]$ deoarece $f'(x) < 0$. $x=2$ este punct de extrem local.</p>	2p 2p 1p
c)	<p>Cum f este descrescătoare pe $[0; 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(0)$.</p> <p>Se calculează $f(1)$ și $f(0)$, $\Rightarrow \frac{1}{e} \leq f(x) \leq e$</p>	3p 2p
2. a)	$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{x + 2} dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 4 - \frac{9}{x + 2} \right) dx =$ $\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 9 \ln(x + 2) \right) \Big _0^1 = \frac{10}{3} - 9 \ln \frac{3}{2}.$	2p 3p
b)	$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(1 - \frac{6}{x+2} + \frac{9}{(x+2)^2} \right) dx$ $= \pi \left(x - 6 \ln(x+2) - \frac{9}{x+2} \right) \Big _0^1 = \pi \left(\frac{5}{2} - 6 \ln \frac{3}{2} \right).$	3p 2p
c)	<p>Fie $f: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Cum $f'(x)$ este pozitivă rezultă că f este strict crescătoare pe $[1; 2]$. Din $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.</p> <p>După care se integrează inegalitatea, $0 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq \int_1^2 \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}$;</p>	2p 2p 1p