

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 83**

Prof: Stoica Alina Codruța

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = 1$ $\text{deci } z^4 + \frac{1}{z^4} = z + \frac{1}{z} = \frac{z^2 + 1}{z} = \frac{-z}{z} = -1$	2p 3p
2.	<p>Avem între rădăcini relația $x_2 - x_1 = 3$ și din relațiile lui Viete pentru ecuația $f(x)=0$ mai avem</p> $x_2 + x_1 = -a \text{ deci } x_2 = \frac{3-a}{2} \text{ care verifică ecuația } f(x)=0$ <p>Din ecuația $a^2 + 8a - 9 = 0$ se obțin soluțiile $a = 1$ și $a = -9$.</p>	1p 2p 2p
3.	<p>Condiții de existență $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$ adică $x \in (0; +\infty)$</p> <p>Folosind proprietățile logaritmilor avem $\lg(x+1)x = \lg 90$</p> <p>rezolvând ecuația $x^2 + x - 90 = 0$ obținem soluția $x = 9$.</p>	1p 2p 2p
4.	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}} = 2 - \frac{1}{2^{2014}}$ $\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}} \right] = 1$ $\left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014}} \right\} = 1 - \frac{1}{2^{2014}}$	2p 2p 1p
5.	<p>Dacă notăm $\vec{AB} = \vec{u}$ și $\vec{BC} = \vec{v}$ obținem prin calcul vectorial $\vec{AC} + \vec{BD} = 3\vec{v}$</p> <p>adică $\left \vec{AC} + \vec{BD} \right = 3 \left \vec{v} \right = 3 \cdot 10 = 30$</p>	2p 3p

6.	$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \frac{-2}{\sqrt{41} \sqrt{13}} < 0$ <p>deci unghiul este obtuz</p>	3p 2p
----	---	----------

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Prin calcul direct obținem	
a)	$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$	2p 3p
b)	b) Vom avea ecuația $\sigma^{2014} \cdot x = e \Rightarrow \sigma \cdot x = e$. cu soluția $x = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	c) Notăm $\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6$ cu o ordonare oarecare a factorilor și avem $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\sigma_1) \cdot \varepsilon(\sigma_2) \cdot \varepsilon(\sigma_3) \cdot \varepsilon(\sigma_4) \cdot \varepsilon(\sigma_5) \cdot \varepsilon(\sigma_6) = (-1)^{m(\sigma_1) + \varepsilon(\sigma_2) + m(\sigma_3) + m(\sigma_4) + m(\sigma_5) + m(\sigma_6)} = -1$ adică σ este permutare impară.	1p 2p 2p
2.	$f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = m$	1p
a)	$f(2) = m + \hat{1}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(2) = \hat{1} + \hat{3}m = \hat{1}$	2p 2p
b)	$f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = 2$ $f(2) = \hat{0} \Rightarrow x_1 = 2$ $f = (x - 2)(x^2 + x + 2) = (x + \hat{1})(x^2 + x + 2)$ <p>Verificăm și că 2 nu este rădăcină dublă</p>	2p 1p 2p
c)	Dacă $m = 2$ atunci f este reducibil cum am văzut la punctul a)	2p

	<p>Dacă $m = \hat{0}$ atunci f este reducibil deoarece $f = x^2(x+2)$</p> <p>Dacă $m = \hat{1}$ atunci $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{1}$ $f(\hat{2}) = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2}$ adică f ireducibil peste $\mathbb{Z}_3[X]$.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p>
--	---	---------------------

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

<p>1.</p> <p>a)</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$</p> <p>$f'(x) = (e^x + x^2)' = e^x + 2x$</p> <p>$f'(1) = e^1 + 2 \cdot 1 = e + 2$</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e + 2$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
<p>b)</p>	<p>$f''(x) = (e^x + 2x)' = e^x + 2$</p> <p>$f''(x) = e^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ deci f este convexă pe $\mathbb{R}$</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>c)</p>	<p>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x^2) = \infty + \infty = \infty$ rezultă că f nu are asimptotă orizontală spre ∞</p> <p>Căutăm asimptotă oblică $y = mx + n$ spre ∞</p> <p>$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x^2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2x}{1} = \infty + \infty = \infty$</p> <p>rezultă că f nu are asimptotă oblică spre ∞</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
<p>2.</p> <p>a)</p>	<p>$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$</p> <p>$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big _0^1 = \frac{\ln 2}{2}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>b)</p>	<p>Pentru $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n$</p> <p>Se integrează inegalitățile și se obține că $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pentru orice n natural nenul.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>

c)	$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{1+x^{2n}} \leq x^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx \leq \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}$ <p>pentru $\alpha \in [0;1]$ folosind criteriul cleștelui avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\alpha) = 0$</p> <p>Dacă $\alpha > 1$ avem $I_n(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx + \int_1^\alpha \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$</p> <p>Fie $c \in (1, \alpha)$ avem $\int_1^\alpha \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx = F(\alpha) - F(1) = (\alpha - 1) \frac{c^n}{1+c^{2n}}$</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - 1) \frac{c^n}{1+c^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha - 1) \frac{1}{\frac{1}{c^n} + c^n} = 0$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
----	--	-------------------------------