

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 84

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{5+i}{2}$ $\frac{2+3i}{1+i} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{2+3i}{1+i}\right) = \frac{5}{2}.$	3p 2p
2.	<p>Știm că, în ipoteza $a < 0$, funcția $f(x) = ax^2 + bx + c$ are valoarea maximă $f_{\max} = -\frac{\Delta}{4a}$.</p> <p>În cazul nostru, $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = 13$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{13}{4 \cdot (-1)} = \frac{13}{4}$.</p> <p>Prin urmare, $f_{\max} = \frac{13}{4}$.</p>	1p 2p 2p
3.	<p>Încercăm să încadrăm numărul $\log_3 534$ între două numere naturale consecutive.</p> <p>Avem $3^5 < 534 < 3^6$ și, ținând cont de faptul că funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_3 x$ este strict crescătoare, putem afirma că $\log_3 3^5 < \log_3 534 < \log_3 3^6$, adică $5 < \log_3 534 < 6$.</p> <p>Atunci $[\log_3 534] = 5$.</p>	1p 2p 2p
4.	<p>Există 90 numere naturale cu două cifre, și anume cele de la 10 până la 99. Prin urmare, avem 90 cazuri posibile.</p> <p>Cazurile favorabile sunt numerele naturale pentru care cifra zecilor este cu 2 mai mare decât cifra unităților, adică numerele 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. Prin urmare, avem 8 cazuri posibile.</p> <p>Probabilitatea este $P = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$.</p>	2p 2p 1p
5.	<p>Punctul $A(-1, 2)$ aparține dreptei dacă $2 = -a + b$ (am înlocuit $x = -1$ și $y = 2$ în relația $y = ax + b$).</p> <p>Punctul $B(0, 3)$ aparține dreptei dacă $3 = b$ (am înlocuit $x = 0$ și $y = 3$ în relația $y = ax + b$).</p> <p>Din $2 = -a + b$ și $3 = b$ obținem $a = 1$. Așadar, $a = 1$ și $b = 3$.</p>	2p 2p 1p
6.	<p>Știm că $\sin(2k\pi + x) = \sin x$ și $\cos(2k\pi + x) = \cos x$, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Avem $\sin(2014\pi) = \sin 0 = 0$ și $\cos(2013\pi) = \cos(2012\pi + \pi) = \cos \pi = -1$.</p> <p>Deci $\cos^2(2013\pi) + \sin(2014\pi) = (-1)^2 + 0 = 1$.</p>	1p 3p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Elementul 1 din a doua linie a permutării σ are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 2). Elementul 2 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Elementul 3 are la stânga lui un singur element mai mare decât el (pe 4). Elementul 4 nu are la stânga lui elemente mai mari decât el. Deci numărul de inversiuni este $m(\sigma) = 1 + 0 + 1 + 0 = 2$.</p>	3p
----------	--	----

	Signatura permutării este $\epsilon(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)} = (-1)^2 = 1$, de unde rezultă că permutarea σ este pară.	2p
b)	$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$ $\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$ $\tau^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = e.$ <p>Avem $A = \{\tau, \tau^2, \tau^3, e\}$. Prin urmare, mulțimea A are patru elemente.</p>	1p 1p 1p 2p
c)	<p>Din $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ rezultă că $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.</p> <p>Avem $x = \tau\sigma^{-1}$, adică $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.</p> <p>Prin urmare, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.</p>	2p 2p 1p
2.	Evident, 1 și 2 sunt numere raționale.	1p
a)	<p>Avem că $2^2 - 3 \cdot 1 = 4 - 3 = 1$.</p> <p>Așadar, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in H$.</p>	2p 2p
b)	<p>Trebuie să arătăm că pentru orice elemente $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \in H$, avem că</p> $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \in H.$ <p>Din $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \in H$ rezultă că $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, iar $a^2 - 3b^2 = 1$ și $c^2 - 3d^2 = 1$.</p> <p>Avem $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix}$.</p> <p>Cum $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, rezultă că $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$.</p> <p>În plus, $(ac + 3bd)^2 - 3 \cdot (ad + bc)^2 = a^2c^2 + 6abcd + 9b^2d^2 - 3a^2d^2 - 6abcd - 3b^2c^2 =$ $a^2c^2 - 3a^2d^2 - 3b^2c^2 + 9b^2d^2 = a^2(c^2 - 3d^2) - 3b^2(c^2 - 3d^2) = (a^2 - 3b^2)(c^2 - 3d^2) = 1 \cdot 1 = 1$.</p> <p>Am arătat astfel că $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \in H$. În concluzie, mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor.</p>	1p 1p 1p 1p 1p
c)	<p>Fie $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \in H$. Avem $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + 3bd & 3(ad + bc) \\ ad + bc & ac + 3bd \end{pmatrix}$ și</p> $\begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca + 3db & 3(da + cb) \\ ad + cb & ca + 3db \end{pmatrix}.$ <p>Cum înmulțirea numerelor raționale este</p>	1p

comutativă, rezultă că $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$, adică înmulțirea este comutativă pe H .	1p
Știm că înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ este asociativă. Cum mulțimea H este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ în raport cu înmulțirea matricelor, va rezulta că „ $\cdot$ ” este asociativă pe H .	
Matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$ este element neutru, adică pentru orice element $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in H$, avem	1p
$\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$.	1p
Fie $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \in H$. Avem $\begin{vmatrix} a & 3b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - 3b^2 = 1 \neq 0$, de unde rezultă că matricea $\begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$ este	1p
inversabilă.	
Prin urmare, $(H, \cdot)$ este grup abelian.	

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} \right)' = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2 + x + 2} - x \cdot (\sqrt{x^2 + x + 2})'}{(\sqrt{x^2 + x + 2})^2} =$ $= \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - x \cdot \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}}}{x^2 + x + 2} = \frac{2(x^2 + x + 2) - x(2x + 1)}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}} = \frac{x + 4}{2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2}}, x \in \mathbb{R}.$	2p 3p
b)	<p>Avem $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci $2(x^2 + x + 2)\sqrt{x^2 + x + 2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Semnul funcției f' este dat de semnul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 4$. Așadar, funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -4]$ și crescătoare pe intervalul $[-4, +\infty)$.</p>	2p 1p 2p
c)	<p>Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, deoarece se obține din operații cu funcții continue.</p> <p>Avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = -1$</p> <p>și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = 1$.</p> <p>Conform subpunctului b), funcția f are un punct de minim $x = -4$. Obținem $f_{\min} = -\frac{2\sqrt{14}}{7}$.</p> <p>Atunci $\text{Im}(f) = \left[-\frac{2\sqrt{14}}{7}, 1\right)$.</p>	1p 1p 1p 2p

2.		2p
a)	$-x+3-\frac{x}{x^2+9}=\frac{(-x+3)(x^2+9)}{x^2+9}-\frac{x}{x^2+9}=$	
	$=\frac{-x^3-9x+3x^2+27-x}{x^2+9}=$	2p
	$\frac{-x^3+3x^2-10x+27}{x^2+9}=f(x), \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$	1p
b)	$\int_1^9 (x-3+f(x))^2 dx = \int_1^9 \left(x-3-x+3-\frac{x}{x^2+9}\right)^2 dx = \int_1^9 \frac{x^2}{(x^2+9)^2} dx =$	2p
	$= -\frac{1}{2} \int_1^9 x \cdot \left(\frac{x}{x^2+9}\right)' dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+9} \Big _1^9 + \frac{1}{2} \int_1^9 \frac{1}{x^2+9} dx =$	2p
	$= -\frac{1}{2} \left(\frac{9}{90} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{6} \arctg \frac{x}{3} \Big _1^9 = \frac{1}{6} \left(\arctg 3 - \arctg \frac{1}{3}\right).$	1p
c)	<p>Facem schimbarea de variabilă $x = f(t)$. Atunci $dx = f'(t) dt$.</p>	1p
	<p>Atunci $\int_{\frac{19}{10}}^3 f^{-1}(x) dx = \int_1^0 t \cdot f'(t) dt = -\int_0^1 t \cdot f'(t) dt =$</p>	1p
	$= -t \cdot f(t) \Big _0^1 + \int_0^1 f(t) dt = -f(1) + \int_0^1 \left(-t+3-\frac{t}{t^2+9}\right) dt = -\frac{19}{10} - \frac{t^2}{2} \Big _0^1 + 3t \Big _0^1 - \frac{1}{2} \ln(t^2+9) \Big _0^1 =$	2p
	$= -\frac{19}{10} - \frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{2} \ln \frac{10}{9} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \ln \frac{10}{9}.$	1p