

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Varianta 85

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem că $2x - 3 = 3i$ sau $2x - 3 = -3i$, iar de aici obținem soluțiile $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$ și $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$.	3p 2p
2.	Vârful unei parabole $y = ax^2 + bx + c$ este $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. În cazul nostru, $\Delta = 4(3m+1)^2 - 4m = 4(9m^2 + 5m + 1) = 36\left(m^2 + \frac{5}{9}m + \frac{1}{9}\right) = 36\left[\left(m + \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{11}{324}\right] > 0$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$. Atunci $-\frac{\Delta}{4a} = -9\left[\left(m + \frac{5}{18}\right)^2 + \frac{11}{324}\right] < 0$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că vârful parabolei se află sub axa Ox pentru orice $m \in \mathbb{R}$.	1p 2p 2p
3.	Pentru existența expresiei $\log_2 \sqrt{x+3}$ impunem condiția $x+3 > 0$, adică $x \in (-3, +\infty)$. Ecuația dată, pentru $x \in (-3, +\infty)$, este echivalentă cu ecuația $\sqrt{x+3} = 2$. Ridicând la pătrat, obținem $x+3 = 4$, de unde rezultă că $x = 1 \in (-3, +\infty)$ este soluția ecuației date.	1p 2p 1p 1p
4.	Termenul general este $T_{k+1} = C_7^k x^{7-k} \left(\frac{2}{x}\right)^k = C_7^k 2^k x^{7-2k}$, unde $k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$. Trebuie să avem $7 - 2k = 3$, de unde se obține $k = 2$. Termenul care conține pe x^3 este $T_3 = T_{2+1} = C_7^2 2^2 x^3 = 84x^3$.	3p 1p 1p
5.	$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$, iar de aici rezultă că $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF}$.	3p 2p
6.	Aplicăm formula fundamentală a trigonometriei: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$. Știind că $\sin a = \frac{3}{5}$, avem $\cos^2 a = 1 - \frac{9}{25}$. În cadranul II, funcția cosinus este negativă. De aceea, din $\cos^2 a = \frac{16}{25}$ va rezulta $\cos a = -\frac{4}{5}$. Avem $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$.	1p 1p 2p 1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Matricea M este inversabilă dacă și numai dacă $\det(M) \neq 0$.	1p
a)	<p>Avem</p> $\det(M) = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2+m & 2-m & 1 \end{vmatrix} = 3m+4+2m-m^2+m+2m-2-6-3m+m^2-2m-2m+2 = m-2$ <p>Din $\det(M) \neq 0$ deducem că $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.</p>	3p 1p
b)	<p>Avem $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2m & 2-m & 1 \end{vmatrix} = 3m+4m+2m-m^2-2+m-6m-2m+m^2-2m+2 = 0$.</p> <p>Cum $\begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 2m & 2-m & 1 \end{vmatrix} = 0$, rezultă că punctele A, B și C sunt coliniare.</p>	3p 2p
c)	<p>Am văzut la punctul a) că $\det(M) = m-2$.</p> <p>Dacă $m \neq 2$, atunci $\text{rang}(M) = 3$.</p> <p>În cazul în care $m = 2$, avem $\det(M) = 0$. Cum $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0$, va rezulta că $\text{rang}(M) = 2$.</p> <p>Așadar, $\text{rang}(M) \geq 2$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.</p>	1p 1p 2p 1p
2.	Avem $\hat{0} + \hat{1} + \dots + \hat{14} = \hat{0} + (\hat{1} + \hat{14}) + (\hat{2} + \hat{13}) + \dots + (\hat{7} + \hat{8}) =$	3p
a)	$\hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$.	2p
b)	<p>$\hat{2} \cdot \hat{k} \neq \hat{6}$, pentru orice $\hat{k} \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \hat{14}\} \setminus \{\hat{3}\}$ și $\hat{2} \cdot \hat{3} = \hat{6}$.</p> <p>Prin urmare, ecuația $\hat{2} \cdot x = \hat{6}$ are în $\mathbb{Z}_{15}$ soluția $x = \hat{3}$.</p>	3p 2p
c)	<p>Un element $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}$ este inversabil dacă și numai dacă numerele naturale k și 15 sunt prime între ele.</p> <p>Elementele neinvertabile sunt acele elemente $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}$ pentru care k are un divizor comun netrivial cu 15, adică $\hat{0}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{9}, \hat{10}, \hat{12}$. Astfel am demonstrat că sunt 7 elemente neinvertabile ale inelului $\mathbb{Z}_{15}$.</p>	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.		2p
a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 7x^2 + 11x - 5}}{x-1} =$ $= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x-5)}{(x-1)^3}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \sqrt[3]{\frac{x-5}{x-1}} = +\infty$	3p
b)	Calculând formal, obținem:	

	$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3 - 7x^2 + 11x - 5} \right)' = \frac{(x^3 - 7x^2 + 11x - 5)'}{3\sqrt[3]{(x^3 - 7x^2 + 11x - 5)^2}} = \frac{3x - 11}{3\sqrt[3]{(x-1)(x-5)^2}}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}.$ <p>Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$.</p> <p>Pe de altă parte, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f'(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow 5} f'(x) = +\infty$. Conform teoremei reciproce a teoremei lui Lagrange, rezultă că funcția f nu este derivabilă în $x = 1$ și în $x = 5$.</p> <p>Prin urmare, domeniul de derivabilitate este $\mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$.</p>	3p																		
c)	<p>Avem că $\sqrt[3]{(x-1)^4(x-5)^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 5\}$. Semnul derivatei f' este dat de funcția $g: \mathbb{R} \setminus \{1; 5\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 14x + 11$. Putem astfel să întocmim următorul tabel de monotonie:</p> <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$\frac{11}{3}$</td><td>5</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>+++++</td><td>-----</td><td>0+++++</td><td>+++++</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td colspan="5"><div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\searrow$</div><div>$-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$</div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\nearrow$</div></div></td></tr></table> <p>Punctul $x = \frac{11}{3}$ este punct de minim local. Punctul $x = 1$ este punct de maxim local.</p>	x	$-\infty$	1	$\frac{11}{3}$	5	$+\infty$	$f'(x)$	+++++	-----	0 +++++	+++++		$f(x)$	<div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\searrow$</div><div>$-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$</div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\nearrow$</div></div>					2p 2p 1p
x	$-\infty$	1	$\frac{11}{3}$	5	$+\infty$															
$f'(x)$	+++++	-----	0 +++++	+++++																
$f(x)$	<div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\searrow$</div><div>$-\frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$</div><div>$\nearrow$</div><div>0</div><div>$\nearrow$</div></div>																			
2. a)	<p>Funcția $x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ este continuă pe intervalul $[1, 2]$. Prin urmare, există $I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.</p> <p>Avem $I_2 = \int_1^2 \left(-e^{\frac{1}{x}} \right)' dx = -e^{\frac{1}{x}} \Big _1^2 = e - \sqrt{e}$.</p>	2p 3p																		
b)	<p>Vom aplica metoda integrării prin părți. Fie $n \in \mathbb{N}$.</p> $I_{n+1} = \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^{n+1}} \right) \left(-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^{n+1}} \right) \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' dx =$ $= -\frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \Big _1^2 - (n+1) \int_1^2 \frac{1}{x^{n+2}} e^{\frac{1}{x}} dx = -\frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} + e - (n+1) I_n$ <p>Deci $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} + (1-n) I_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.</p>	1p 3p																		
c)	<p>Folosind monotonia integralei, din relația $0 \leq \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$, $(\forall) x \in [1, 2]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ rezultă</p> $\int_1^2 0 dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} dx, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$	2p																		

	<p>Avem $\int_1^2 0 \, dx = 0$, $\int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \, dx = I_n$ și $\int_1^2 \frac{e}{x^n} \, dx = \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq \frac{e}{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.</p> <p>Am obținut că $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n-1}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Trecând la limită, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.</p>	2p 1p
--	---	----------