

## BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

## Varianta 86

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

## SUBIECTUL I (30 de puncte)

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                      |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 1. | <p>Avem <math>b_4 = b_2 \cdot q^2</math>, de unde rezultă că <math>q^2 = \frac{b_4}{b_2} = \sqrt{\frac{243}{27}} = 3</math>.</p> <p>Acum putem scrie că <math>b_{10} = b_4 \cdot q^6 = \sqrt{243} \cdot 3^3 = 243\sqrt{3}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3p<br>2p             |
| 2. | <p><math>f(x) = 2^{x^2-4x+3} = 2^{(x-1)(x-3)}</math>, pentru orice <math>x \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Atunci <math>f(1) = 2^{(1-1)(1-3)} = 2^0 = 1</math> și <math>f(3) = 2^{(3-1)(3-3)} = 2^0 = 1</math>.</p> <p>Am găsit că <math>f(1) = f(3)</math>, ceea ce ne demonstrează că funcția <math>f</math> nu este injectivă.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2p<br>2p<br>1p       |
| 3. | <p>Ecuția dată se mai poate scrie sub forma <math>3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^x \cdot 3^2 = 32</math>.</p> <p>Dând factor comun se obține <math>3^x(1 - 3^1 + 2 \cdot 3^2) = 32</math>, adică <math>3^x \cdot 16 = 32</math>.</p> <p>Din <math>3^x = 2</math> se obține soluția <math>x = \log_3 2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1p<br>3p<br>1p       |
| 4. | <p>Putem avea trei situații: <math>f(1) = f(2) = 4</math>, <math>f(1) = f(2) = 5</math>, respectiv <math>f(1) = 4</math> și <math>f(2) = 5</math>.</p> <p>Așadar, există trei funcții cu proprietatea că <math>f(1) \leq f(2)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4p<br>1p             |
| 5. | <p>Determinăm mai întâi coordonatele vectorului <math>\overrightarrow{AB}</math>. Avem <math>\overrightarrow{AB} = (-1-2)\vec{i} + (4-3)\vec{j}</math>, de unde rezultă că <math>\overrightarrow{AB}(-3,1)</math>.</p> <p>Ecuția dreptei care trece prin punctul <math>C(1,-2)</math> și are direcția vectorului <math>\overrightarrow{AB}</math> este:</p> <p><math>d: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{1}</math>, adică <math>d: x+3y+5=0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2p<br>3p             |
| 6. | <p>Folosim formulele <math>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}</math> și <math>\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}</math>.</p> <p>Atunci ecuația dată se poate rescrie <math>\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \pi} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}</math>, adică <math>\operatorname{tg}^2 x = 1</math>.</p> <p>Obținem astfel că <math>\operatorname{tg} x = 1</math> sau <math>\operatorname{tg} x = -1</math>.</p> <p>Ținând cont de faptul că <math>x \in [0, 3\pi]</math>, obținem <math>x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \right\}</math>.</p> | 1p<br>2p<br>1p<br>1p |

## SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

|          |                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.<br>a) | $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} \stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1-a & 1-a \\ 1 & 0 & b-1 \end{vmatrix} =$ | 3p |
|          | $= \begin{vmatrix} 1-a & 1-a \\ 0 & b-1 \end{vmatrix} = (1-a)(b-1).$                                                                                                                                                                  | 2p |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                            |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| b)       | <p>Dacă <math>a = 0</math> și <math>b = 2</math>, atunci sistemul devine <math>\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z = -1 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}</math>.</p> <p>Din prima ecuație și a doua ecuație ale sistemului obținem <math>x - 1 = 0</math>, adică <math>x = 1</math>.</p> <p>Cu a doua ecuație și a treia ecuație ale sistemului se obține <math>\begin{cases} y + z = -1 \\ y + 2z = -2 \end{cases}</math>. Folosind metoda eliminării, rezultă că <math>y = 0</math> și <math>z = -1</math>.</p>                                                                                                                                                                         | 1p<br>2p<br>2p             |
| c)       | <p>Dacă <math>b = 1</math>, sistemul de ecuații devine <math>\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + y + z = a - 1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}</math>.</p> <p>Observăm că prima ecuație și a treia ecuație ale sistemului duc la egalitatea <math>0 = -1</math>, de unde rezultă că sistemul este incompatibil.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2p<br>3p                   |
| 2.<br>a) | $\begin{array}{r rrr} 8X^4 & +2X^3 & -13X^2 & +7X & -1 \\ -8X^4 & -8X^3 & +8X^2 & & \\ \hline & -6X^3 & -5X^2 & +7X & -1 \\ & 6X^3 & +6X^2 & -6X & \\ \hline & & X^2 & +X & -1 \\ & & -X^2 & -X & +1 \\ \hline & & & & \\ & & & & \end{array}$ <p>Deoarece am obținut restul <math>r = 0</math>, rezultă că <math>f : (X^2 + X - 1)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4p<br>1p                   |
| b)       | <p>Avem <math>\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}</math>.</p> <p>Din relațiile lui Viète obținem <math>x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 = -\frac{7}{8}</math> și <math>x_1x_2x_3x_4 = -\frac{1}{8}</math>.</p> <p>Atunci <math>\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = -\frac{7}{8} \cdot \left(-\frac{8}{1}\right) = 7</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                  | 2p<br>2p<br>1p             |
| c)       | <p>Conform subpunctului a), avem că <math>f = (X^2 + X - 1)(8X^2 - 6X + 1)</math>.</p> <p>Ecuația <math>f(x) = 0</math> se reduce la rezolvarea a două ecuații de gradul doi: <math>x^2 + x - 1 = 0</math>, respectiv <math>8x^2 - 6x + 1 = 0</math>.</p> <p>Ecuația <math>x^2 + x - 1 = 0</math> are discriminantul negativ și va avea ca soluții două numere complexe conjugate.</p> <p>Discriminantul ecuației <math>8x^2 - 6x + 1 = 0</math> este <math>\Delta = 4</math>. Obținem soluțiile <math>x_1 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}</math> și <math>x_2 = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}</math>.</p> <p>În concluzie, polinomul <math>f</math> nu are nicio rădăcină întreagă.</p> | 1p<br>1p<br>1p<br>1p<br>1p |

**SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)**

|          |                                                                                                                  |    |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.<br>a) | Vom folosi metoda inducției matematice. Avem $a_1 = \frac{1}{2} \in (0,1)$ și etapa de verificare este parcursă. | 1p |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                      |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
|          | <p>Presupunem că <math>a_k \in (0,1)</math>, unde <math>k \in \mathbb{N}^*</math>. Să arătăm că <math>a_{k+1} \in (0,1)</math>.</p> <p><math>a_k \in (0,1) \Rightarrow a_k^2 \in (0,1) \Rightarrow a_k^2 + 1 \in (0,2) \Rightarrow a_k(a_k^2 + 1) \in (0,2) \Rightarrow \frac{a_k(a_k^2 + 1)}{2} \in (0,1) \Rightarrow a_{k+1} \in (0,1)</math>.</p> <p>Deci <math>a_n \in (0,1)</math>, pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1p<br>2p<br>1p       |
| b)       | <p>Cum <math>a_n \in (0,1)</math>, pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, rezultă că șirul <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}</math> este mărginit.</p> <p>Pentru studiul monotoniei, din <math>a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2 + 1)}{2}</math> rezultă că <math>\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n^2 + 1}{2}</math>, pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math>.</p> <p>Însă <math>a_n^2 + 1 \in (0,2)</math>, pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math>, va rezulta că <math>\frac{a_{n+1}}{a_n} &lt; 1</math>, pentru orice <math>n \in \mathbb{N}^*</math>. Prin urmare, șirul <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}</math> este strict descrescător. Fiind monoton și mărginit, șirul <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}</math> este convergent.</p>                                                                                                                                                                                                                         | 1p<br>2p<br>2p       |
| c)       | <p>Fie <math>L \in [0,1]</math> limita șirului <math>(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}</math>. Având în vedere relația de recurență, putem afirma că</p> <p><math>L = \frac{L(L^2 + 1)}{2}</math>, adică <math>L(L^2 - 1) = 0</math>. Cum șirul este descrescător, va rezulta că <math>L = 0</math>.</p> <p>Atunci <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 1}{2} = \frac{1}{2}</math>.</p> <p>Așadar, <math>\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1p<br>1p<br>2p<br>1p |
| 2.<br>a) | <p><math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &lt; 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &lt; 0}} (x+1)e^x = 1 = f(0)</math> și <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} \cos x = 1</math>.</p> <p>Cum <math>\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &lt; 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x &gt; 0}} f(x) = f(0)</math>, rezultă că funcția <math>f</math> este continuă în punctul <math>x_0 = 0</math>.</p> <p>Funcția <math>f</math> este continuă pe <math>(-\infty, 0)</math> deoarece este egală cu produsul a două funcții continue (funcția de gradul întâi și funcția exponențială). Funcția <math>f</math> este continuă pe <math>(0, +\infty)</math> deoarece este restricție a funcției cosinus.</p> <p>Am arătat că funcția <math>f</math> este continuă pe <math>\mathbb{R}</math>. Prin urmare, funcția <math>f</math> admite primitive pe <math>\mathbb{R}</math>.</p> | 2p<br>1p<br>1p<br>1p |
| b)       | <p>Din teorema de existență a primitivelor, funcția <math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>F(x) = \int_0^x f(t) dt</math> este o primitivă a funcției <math>f</math>.</p> <p>Avem <math>\int_0^x (t+1)e^t dt = (t+1)e^t \Big _0^x - \int_0^x e^t dt = xe^x</math> și <math>\int_0^x \cos t dt = \sin t \Big _0^x = \sin x</math>.</p> <p>O primitivă a funcției <math>f</math> este <math>F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>F(x) = \begin{cases} xe^x, &amp; x \leq 0 \\ \sin x, &amp; x &gt; 0 \end{cases}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 1p<br>3p<br>1p       |
| c)       | <p><math>V = \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} f(x) dx = \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x dx =</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 2p                   |

|  |                                                                                                                                                                                   |    |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|  | $= \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x (\sin x)' dx = \pi \cos x \sin x \Big _{\pi/3}^{\pi/2} + \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 x dx =$                                               | 2p |
|  | $- \frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \pi x \Big _{\pi/3}^{\pi/2} - \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x dx = - \frac{\pi\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi^2}{6} - \pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2 x dx$ | 1p |
|  | <p>Atunci <math>V = \frac{\pi(2\pi - 3\sqrt{3})}{24}</math>.</p>                                                                                                                  |    |