

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 87

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\alpha \in \mathbb{C}$ este soluție a ecuației $mz^2 + nz + p = 0$, unde $m, n, p \in \mathbb{C}$, dacă $m\alpha^2 + n\alpha + p = 0$. Avem $(2 - i\sqrt{3})^2 = 4 - 4i\sqrt{3} + 3i^2 = 1 - 4i\sqrt{3}$. Atunci $(2 - i\sqrt{3})^2 - 4(2 - i\sqrt{3}) + 7 = 1 - 4i\sqrt{3} - 8 + 4i\sqrt{3} + 7 = 0$. Prin urmare, $2 - i\sqrt{3}$ este soluție a ecuației $z^2 - 4z + 7 = 0$.	1p 2p 1p 1p
2.	Deoarece $x \in [3; 9]$, rezultă că $ x - 3 = x - 3$. Avem $ x - 5 = \begin{cases} x - 5, & x \geq 5 \\ 5 - x, & x < 5 \end{cases}$. Atunci $f : [3; 9] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2, & 3 \leq x < 5 \\ 2x - 8, & 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$. Funcția $g : [5; 9] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 8$ este strict crescătoare. Prin urmare, $f_{\max} = 2 \cdot 9 - 8 = 10$. Cum $f_{\min} = 2$, rezultă că $f_{\max} + f_{\min} = 10 + 2 = 12$.	1p 1p 1p 2p
3.	Avem $2x^2 + x + 4 = 2 \left[\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{31}{16} \right] > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că expresia $\sqrt{2x^2 + x + 4}$ are sens pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Impunem condiția ca $8 - x \geq 0$, adică $x \in (-\infty, 8]$. Prin ridicare la pătrat, din $\sqrt{2x^2 + x + 4} = 8 - x$ obținem ecuația $x^2 + 17x - 60 = 0$. Discriminantul ecuației este $\Delta = 529$. Soluțiile ecuației $x^2 + 17x - 60 = 0$ sunt $x_1 = 3$ și $x_2 = -20$. Cum $-20 \notin (-\infty, 8]$, rezultă că ecuația $\sqrt{2x^2 + x + 4} = 8 - x$ are soluția $x = 3$.	2p 1p 1p 1p
4.	Numărul funcțiilor $f : A \rightarrow B$ este egal cu $3^4 = 81$. Există $3^4 - C_3^1 2^4 + C_3^2 1^4 = 36$ funcții surjective. Probabilitatea cerută este $P = \frac{36}{81}$.	2p 2p 1p
5.	Distanța dintre punctele $A(2m+1, 2)$ și $B(2, 2m)$ este $AB = \sqrt{(2m+1-2)^2 + (2-2m)^2} = \sqrt{8m^2 - 12m + 5}$. Avem de rezolvat ecuația irațională $\sqrt{8m^2 - 12m + 5} = 5$. Expresia $\sqrt{8m^2 - 12m + 5}$ are sens pentru orice $m \in \mathbb{R}$, deoarece $8m^2 - 12m + 5 = 8 \left[\left(m - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{16} \right] > 0$, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.	2p 1p

	Prin ridicare la pătrat, ecuația $\sqrt{8m^2 - 12m + 5} = 5$ devine $2m^2 - 3m - 5 = 0$. Soluțiile acestei ecuații sunt $m_1 = -1$ și $m_2 = \frac{5}{2}$.	2p
6.	Notăm cu R raza cercului circumscris triunghiului ABC și vom folosi formula $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \mathcal{A}_{ABC}}$.	1p
	Semiperimetrul triunghiului ABC este $p = \frac{8+8+10}{2} = 13$.	1p
	Folosind formula lui Heron, $\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, obținem $\mathcal{A}_{ABC} = 5\sqrt{39}$.	2p
	Atunci $R = \frac{8 \cdot 8 \cdot 10}{4 \cdot 5\sqrt{39}} = \frac{32\sqrt{39}}{39}$.	1p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Pentru $m = 0 \in \mathbb{R}$ se obține $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix}$.	3p
	Avem $I_3 = A(0) \in M$.	2p
b)	Fie $m, n \in \mathbb{R}$. Avem $A(m) \cdot A(n) = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{m+n} \end{pmatrix} = A(m+n)$.	5p
c)	$A(1) + A(2) + \dots + A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 2014 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2014} \end{pmatrix} =$	1p
	$= \begin{pmatrix} 1+2+\dots+2014 & 1+2+\dots+2014 & 0 \\ 0 & 1+2+\dots+2014 & 0 \\ 0 & 0 & 3^1+3^2+\dots+3^{2014} \end{pmatrix}$.	2p
	Cum $1+2+\dots+2014 = 1007 \cdot 2015$ și $3^1+3^2+\dots+3^{2014} = \frac{3^{2015}-3}{2}$, rezultă că	
	$A(1) + A(2) + \dots + A(2014) = \begin{pmatrix} 1007 \cdot 2015 & 1007 \cdot 2015 & 0 \\ 0 & 1007 \cdot 2015 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3^{2015}-3}{2} \end{pmatrix}$.	2p
2. a)	$e \in \mathbb{Z}$ este element neutru pentru legea de compoziție „ $\circ$ ” dacă $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.	1p
	Avem $x \circ e = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow xe - 2x - 2e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-2)(e-3) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$.	2p
	De aici deducem că $e = 3$. Cum $3 \circ x = 3x - 6 - 2x + 6 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $e = 3$ este element neutru.	2p
b)	$x^2 \star (x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$.	3p

	Discriminantul ecuației $x^2 + x - 2 = 0$ este $\Delta = 9$. Soluțiile sunt $x_1 = -2 \in \mathbb{Z}$ și $x_2 = 1 \in \mathbb{Z}$.	2p
c)	<p>Elementul neutru al legii de compoziție „$\star$” este 2. Într-adevăr, $x \star 2 = x + 2 - 2 = x$ și $2 \star x = 2 + x - 2 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ este un izomorfism de inele. Atunci f trimite elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z}, \star, \circ)$ în elementele neutre ale inelului $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, adică</p> $\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a + b = 1 \end{cases}. \text{Obținem } a = 1 \text{ și } b = -2. \text{ Izomorfismul este în mod necesar de forma } f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x - 2.$ <p>Arătăm că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$ este izomorfism de inele.</p> <p>Avem $f(x \star y) = x + y - 2 - 2 = x - 2 + y - 2 = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ și $f(x \circ y) = xy - 2x - 2y + 4 = x(y - 2) - 2(y - 2) = (x - 2)(y - 2) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, f este un morfism de inele.</p> <p>Arătăm acum că funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$ este bijectivă.</p> <p>Fie $y \in \mathbb{Z}$. Avem $f(x) = y \Leftrightarrow x - 2 = y \Leftrightarrow x = y + 2 \in \mathbb{Z}$, adică ecuația $f(x) = y$ are soluție unică. Prin urmare, funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x - 2$ este bijectivă.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	Fie $x \in \mathbb{R}$. Cum $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, avem în particular că $e^x + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este bine definită.	1p
a)	<p>Știm că $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Atunci $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x + 1} + x + 2 \right) = -\infty$.</p> <p>Știm că $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Atunci $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x + 1} + x + 2 \right) = +\infty$.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p>
b)	<p>Avem $e^x + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Funcția $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ fiind egală cu raportul a două funcții derivabile (funcțiile $x \mapsto 1$ și $x \mapsto e^x + 1$).</p> <p>Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de două funcții derivabile, anume funcțiile $x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ și $x \mapsto x + 2$.</p> <p>Avem $f'(x) = \left(\frac{1}{e^x + 1} + x + 2 \right)' = \frac{1' \cdot (e^x + 1) - 1 \cdot (e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} + 1 + 0 = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{(e^x + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Cum $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde deducem că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
c)	<p>Punctul $P(a, b)$ este centru de simetrie al graficului funcției f dacă și numai dacă $f(x) + f(2a - x) = 2b$, pentru orice element x din domeniul de definiție al funcției f.</p> <p>În cazul acestei probleme, trebuie să arătăm că $f(x) + f(-x) = 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Într-adevăr, $f(x) + f(-x) = \frac{1}{e^x + 1} + x + 2 + \frac{1}{e^{-x} + 1} - x + 2 = \frac{1}{e^x + 1} + \frac{e^x}{e^x + 1} + 4 = 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
2.	Funcția f este continuă pe $[0, +\infty)$ ca produs de funcții continue. Atunci funcția F este derivabilă	

a)	<p>pe $[0, +\infty)$ și $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.</p> <p>Pentru orice $x \in [0, +\infty)$, avem $\frac{x}{6} \geq 0$ și $e^{-\frac{x}{3}} > 0$.</p> <p>Deducem astfel că $F'(x) = \frac{x}{6} \cdot e^{-\frac{x}{3}} \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, egalitatea având loc doar pentru $x = 0$. Prin urmare, funcția F este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
b)	<p>Fie $x \in [0, +\infty)$.</p> $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t}{6} e^{-\frac{t}{3}} dt = -\frac{1}{2} \int_0^x t \left(e^{-\frac{t}{3}} \right)' dt =$ $-\frac{1}{2} t e^{-\frac{t}{3}} \Big _{t=0}^{t=x} - \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{3}} \Big _{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2} \left(3 - x e^{-\frac{x}{3}} - 3 e^{-\frac{x}{3}} \right).$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Avem $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{x}{3}} \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{3}}} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{3} e^{\frac{x}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{e^{\frac{x}{3}}} = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{x}{3}} = 0$.</p> <p>Atunci $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(3 - x e^{-\frac{x}{3}} - 3 e^{-\frac{x}{3}} \right) = \frac{3}{2}$. În plus, $F(0) = 0$.</p> <p>Am văzut la subpunctele anterioare că funcția F este continuă și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$. Așadar, ecuația $F(x) = k$ are soluție unică în intervalul $[0, +\infty)$, pentru orice $k \in \left[F(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \right)$. Ținând cont de faptul că $F(0) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{3}{2}$, am demonstrat că ecuația $F(x) = k$ are soluție unică în intervalul $[0, +\infty)$, pentru orice $k \in \left[0, \frac{3}{2} \right)$.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>