BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 89

Prof: Szép Gyuszi

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	Avem $\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)+\log_3\left(\sqrt{10}+1\right)=\log_3\left(\sqrt{10}-1\right)\left(\sqrt{10}+1\right)=$ $\log_3(10-1)=\log_3 9=2$.	3p 2p
2.	Scriem relațiile lui Viète: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=m\end{cases}$. Atunci $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2m$. Cum $x_1^2+x_2^2=10$, obținem ecuația $4-2m=10$. Rezultă că $m=-3$.	2p 2p 1p
3.	Rezolvând ecuația $5^x+1=26$, obținem $x=2$. Atunci $g(26)=g\left(f(2)\right)=2$.	2p 3p
4.	Mulțimea $A=\{1;2;3;4;5\}$ are $2^5=32$ submulțimi. Numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^2=10$. Atunci probabilitatea cerută este $P=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}$.	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{MN}\right\|\cdot\cos 30^\circ=8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$. $\left\|\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MN}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MQ}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MN}\right\|^2+2\overrightarrow{MQ}\cdot\overrightarrow{MN}=8^2+3^2+24\sqrt{3}=73+24\sqrt{3}$.	2p 3p
6.	Avem $\cos\frac{17\pi}{36}=\cos\frac{18\pi-\pi}{36}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{36}\right)=\sin\frac{\pi}{36}$. Atunci $\sin\frac{\pi}{36}-\cos\frac{17\pi}{36}=\sin\frac{\pi}{36}-\sin\frac{\pi}{36}=0$.	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	Avem $\begin{vmatrix}3&-2\\-2&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-(-2)\cdot(-2)=-6-4=-10\neq 0$. Atunci matricea A are rangul egal cu 2.	3p 2p
b)	$A\cdot{}^tA=\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-2\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-8\\-8&17\end{pmatrix}$. $\det\left(A\cdot{}^tA\right)=\begin{vmatrix}17&-8\\-8&17\end{vmatrix}=17^2-8^2$.	2p 2p

www.mateinfo.ro

	$17^2-8^2=(17-8)(17+8)=9\cdot 25=15^2$ și deci $\det\left(A\cdot {}^tA\right)$ este pătrat perfect.	1p
c)	${}^tA\cdot A=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&-2\\-2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{pmatrix}$.	2p
	Atunci $\det\left({}^tA\cdot A\right)=\begin{vmatrix}13&-2&-12\\-2&8&-2\\-12&-2&13\end{vmatrix}=169\cdot 8-48-48-144\cdot 8-52-52=200-96-104=0$.	3p
2. a)	Ecuația $g(x)=0$ are soluțiile $y_1=-i$ și $y_2=i$.	1p
	Vom aplica schema lui Horner pentru determinarea restului împărțirii polinomului f la polinomul g.	
	$\begin{array}{c\|cccc} & X^3 & X^2 & X^1 & X^0 \\ & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline -i & 1 & -i+1 & 1-i & -i+1 \\ \hline i & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & X^1 & X^0 & X^1 & X^0 \end{array}$	3p
	Restul căutat este $r=X+1$.	1p
b)	Avem $f=X^3+X^2+2X+2=X^2(X+1)+2(X+1)=(X+1)(X^2+2)$.	2p
	Una dintre rădăcinile polinomului f este egală cu -1, ceea ce conduce la anularea unuia dintre factorii produsului $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)$. De aici se deduce imediat că $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=0$.	3p
c)	Rădăcinile polinomului f sunt $x_1=-1$, $x_2=-i\sqrt{2}$ și $x_3=i\sqrt{2}$. Atunci	2p
	$g(x_1)=(-1)^2+1=2$, $g(x_2)=\left(-i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$ și $g(x_3)=\left(i\sqrt{2}\right)^2+1=1-2i$.	2p
	Avem $g(x_1)\cdot g(x_2)\cdot g(x_3)=2\cdot(1-2i)^2=2(-3-4i)=-6-8i$.	1p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$f(0)=\frac{3}{2}$. Așadar, trebuie să scriem ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$.	
	Funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, fiind egală cu raportul a două funcții derivabile.	1p
	$f'(x)=\left(\frac{4x+3}{3x+2}\right)'=\frac{4(3x+2)-3(4x+3)}{(3x+2)^2}=-\frac{1}{(3x+2)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$, iar de aici	2p
	deducem că $f'(0)=-\frac{1}{4}$.	
	Ecuația tangentei în punctul $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$ la graficul funcției f este: $y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}(x-0)$, adică	2p
	$y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.	

www.mateinfo.ro

b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{3x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x+2}\right)^{x\,(1^\infty)}=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x+2}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{3x+2}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$.	3p
c)	$f''(x)=\left(-\dfrac{1}{(3x+2)^2}\right)'=\dfrac{6}{(3x+2)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.	1p 1p
	Avem $g'(x)=\left(5^x\right)'f'\left(5^x\right)=5^x\ln 5\cdot f'\left(5^x\right)$ și $g''(x)=5^x\ln^2 5\cdot f'\left(5^x\right)+5^x\ln 5\cdot f''\left(5^x\right)$.	
	Deci $g''(x)=\dfrac{5^x\ln^2 5\left(3\cdot 5^x-2\right)}{\left(3\cdot 5^x+2\right)^3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.	2p
	Punctul $x=\log_5\dfrac{2}{3}$ este punct de inflexiune.	1p
2. a)	Dacă funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$, atunci funcția f trebuie să fie continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$. Funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$. Din condiția de continuitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(2^x+m\right)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(2nx+\sin x\right)$, adică $m+1=0$. Prin urmare, $m=-1$.	2p
	Din condiția de derivabilitate a funcției f în punctul $x_0=0$, deducem că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\dfrac{2^x-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\dfrac{2nx+\sin x}{x}$, adică $2n+1=\ln 2$. Așadar, $n=\ln\sqrt{\dfrac{2}{e}}$.	2p
	Funcția f este o primitivă a unei funcții pe $\mathbb{R}$ pentru $m=-1$ și $n=\ln\sqrt{\dfrac{2}{e}}$.	1p
b)	Pentru $m=-1$ și $n=1$ obținem funcția $f(x)=\begin{cases}2^x-1, & x\le 0\\ 2x+\sin x, & x>0\end{cases}$. Conform subpunctului a),	
	pentru $m=-1$, funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$. În particular, funcția f este continuă pe $\left[-1,\dfrac{\pi}{3}\right]$.	2p
	Prin urmare, funcția f este integrabilă pe $\left[-1,\dfrac{\pi}{3}\right]$.	
	$\int_{-1}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\left(2^x-1\right)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(2x+\sin x)\,dx=$	2p
	$=\left(\dfrac{2^x}{\ln 2}-x\right)\Big\|_{-1}^{0}+x^2\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}-\cos x\Big\|_0^{\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{2\ln 2}-1+\dfrac{\pi^2}{9}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi^2}{9}$.	1p
c)	$\mathcal{A}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(2nx+\sin x)\,dx=$	1p

www.mateinfo.ro

	$= x^2 n\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} - \cos x\Big\|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = \frac{3}{2} + \frac{8\pi^2 n}{9}$. $\mathcal{A} = 5 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{8\pi^2 n}{9} = 5 \Leftrightarrow n = \frac{63}{16\pi^2}$.	3p 1p

www.mateinfo.ro