

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 90

Prof: Teler Marian

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{3^{-1}} (3^{-3}) = \frac{-3}{-1} = 3$ $\log_2 \frac{1}{8} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 0$	2p 2p 1p
2.	$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $V_f(1, a-1), V_g\left(\frac{b}{4}, 1 + \frac{b^2}{8}\right)$ Se obține sistemul: $\frac{b}{4} = 1, a-1 = 1 + \frac{b^2}{8}, a = b = 4$	1p 2p 2p
3.	$\log_9(x+1) = \log_{3^2}(x+1) = \frac{1}{2} \log_3(x+1)$ Se obține $\frac{3}{2} \log_3(x+1) = \frac{3}{2}$ $\log_3(x+1) = 1, x = 2$	2p 2p 1p
4.	Numărul cazurilor posibile este $70 - 6 = 64$ Mulțimea cazurilor favorabile este $\{3^2, 4^2, \dots, 8^2\} \cup \{2^3, 3^3, 4^3\}$, 8 cazuri	2p 2p

	$p = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}$	1p
5.	$x_B = \frac{x_A + x_M}{2}, y_B = \frac{y_A + y_M}{2}$ $M(5, 2)$	2p 3p
6.	Se verifică relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$, triunghiul este dreptunghic, $m(\angle A) = 90^\circ$ $A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 120$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$ $2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $A^2 - 2A = O_2$	2p 2p 1p
b)	$X(p)X(q) = (I_3 + pA)(I_3 + qA) = I_3 + pA + qA + pqA^2$ $X(p)X(q) = X(p+q+2pq)$	3p 2p
c)	<p>Conform b), $X(2)X\left(-\frac{2}{5}\right) = X\left(2 - \frac{2}{5} - \frac{8}{5}\right) = X(0) = I_3$</p> <p>Din i), rezultă $(X(2))^{-1} = X\left(-\frac{2}{5}\right)$</p>	3p 2p
2.	Se aplică teorema lui Bézout, $f(1) = 0$.	3p
a)	$a = -3$	2p
b)	$\frac{x_1+1}{x_1} + \frac{x_2+1}{x_2} + \frac{x_3+1}{x_3} = 1 + \frac{1}{x_1} + 1 + \frac{1}{x_2} + 1 + \frac{1}{x_3} = 3 + \frac{x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}$	3p

	Se aplică relațiile lui Viète, se obține 0	2p
c)	$f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = f(1) = 3$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = -2$ <p>Dreapta $y = x - 2$ este asimptotă oblică către $+\infty$</p>	2p 2p 1p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(0)}{2x - 0} = 2 f'(0)$ $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}, \quad f'(0) = 2, \text{ finalizare.}$	3p 2p
c)	<p>Ecuția tangentei la grafic este: $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$</p> <p>Se obține: $y + 1 = 2x$, sau $2x - y - 1 = 0$</p>	3p 2p
2. a)	$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(x - \ln(x+1)\right) \Big _0^1 = 1 - \ln 2$ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^2 + x - x}{x+1} dx = \int_0^1 x dx - I_1 = \ln 2 - \frac{1}{2}$	3p 2p
b)	$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ <p>Pentru $x \in [0, 1]$ avem $x^{n+1} \leq x^n$, rezultă $I_{n+1} \leq I_n$, șirul (I_n) este descrescător și mărginit, deci convergent</p> <p>Trecând la limită în relația de recurență, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$</p>	2p 2p 1p

c)	$\frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+1} \leq I_n + I_n = 2I_n \Rightarrow \frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n$ $\frac{1}{n+1} = I_{n+1} + I_n \geq I_{n+1} + I_{n+1} = 2I_{n+1} \Rightarrow I_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)}, I_n \leq \frac{1}{2n}, nI_n \leq \frac{1}{2}$ <p>Din $\frac{n}{2(n+1)} \leq nI_n \leq \frac{1}{2}$, cu teorema cleștelui se obține $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \frac{1}{2}$</p>	2p
		2p
		1p