

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 91**

Prof: Teler Marian

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$A = \{2, 4, 6, \dots, 100\}$, $\text{card}(A) = 50$ $B = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$, $\text{card}(B) = 20$ $A \cap B = \{10, 20, 30, \dots, 100\}$, $\text{card}(A \cap B) = 10$ $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B) = 60$	1p 1p 1p 2p
2.	$\frac{2-i}{2+i} 5 + \frac{2+i}{2-i} a = \frac{5(2-i) + a(2+i)}{2^2 - i^2} =$ $\frac{10 + 2a + (a-5)i}{5}$ Finalizare, $a = 5$	2p 2p 1p
3.	Cu notația $2^x = y$, ecuația devine: $y^2 - 5y + 6 = 0$ Obținem: $y_1 = 2, y_2 = 3$ $2^x = 2, x_1 = 1, 2^x = 3, x_2 = \log_2 3$	1p 2p 2p
4.	$A_x^2 = x(x-1)$ $C_x^{x-2} = C_x^2 = \frac{x(x-1)}{2}$ Obținem: $\frac{3x(x-1)}{2} = 18, x(x-1) = 12$ Finalizare, $x = 4$	1p 1p 2p 1p

5.	$A, B, C \text{ coliniare} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & m & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$	3p
	Finalizare, $m = 14$	2p
6.	$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9}$	2p
	$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$	1p
	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$	2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 6, \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} = 6. \text{ (Relațiile lui Viète)}$	3p
a)	$f(x_1 + x_2 + x_3) - f(x_1 x_2 x_3) = 0$	2p
b)	<p>Adunând x_2 în relația $x_1 + x_3 = 2x_2$, obținem $3x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 6, \quad x_2 = 2$</p> <p>$x_2 = 2$ verifică ecuația, $m = 11$</p>	3p
c)	<p>$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$</p> <p>Se obține $C_3^3 + C_5^1 + C_4^2 = 12$</p>	3p
2.	$A^2 = O_3$	5p
a)		
b)	$BC = (I_3 + A)(I_3 - A) = I_3 - A^2 = I_3$ $CB = (I_3 - A)(I_3 + A) = I_3 - A^2 = I_3$ $BC = CB$	2p
		2p
		1p
c)	$BC = CB = I_3$	3p
		2p

	$B^{-1} = C$	
--	--------------	--

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	a)	$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>f'(x)</td><td>-----</td><td>0</td><td>+++++</td></tr></table> <p>$x = 0$ este punct de minim.</p>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	f'(x)	-----	0	+++++	2p 1p 1p 1p
x	$-\infty$	0	$+\infty$								
f'(x)	-----	0	+++++								
	b)	$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f''(x) > 0, \forall x \in R$, graficul funcției f nu are puncte de inflexiune	3p 2p								
	c)	$g_0(x) = f(x) + f'(x) - e^x = 0$ Se obține $g_{n+1}(x) = g'_n(x)$, Se obține $g_n(x) = 0, \forall n \in N$	2p 1p 2p								
2.		Fie F o primitivă a funcției f $\Rightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (-2, \infty)$	2p								
	a)	$F''(x) = f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}, \forall x \in (-2, \infty)$ $F''(x) > 0, \forall x \in (-2, \infty)$, F este convexă	2p 1p								
	b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$ $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x^2+3x+2)'}{x^2+3x+2} dx = \ln(x^2+3x+2) \Big _0^1$ $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \ln 3$	2p 2p 1p								

c)	<p>Soluția 2</p> $\int_x^{3x} f(t)dt \geq \int_x^{3x} dt = 2x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{3x} f(t)dt = \infty$ <p>Se aplică regula lui L'Hospital,</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_x^{3x} f(t)dt \right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(F(3x) - F(x))'}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (3f(3x) - f(x)) \dots$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 \cdot \frac{6x+3}{3x+2} - \frac{2x+3}{x+2} \right) = 4$ <p>.....</p> <p>Soluția 2</p> $\int_x^{3x} f(t)dt = \int_x^{3x} \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_x^{3x} \left(2 - \frac{1}{t+2} \right) dt$ $\int_x^{3x} f(t)dt = \int_x^{3x} \frac{2t+3}{t+2} dt = (2t - \ln(t+2)) \Big _x^{3x} = 4x + \ln \frac{x+2}{3x+2}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^{3x} f(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} \ln \frac{x+2}{3x+2} \right) = 4$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
----	---	---