

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 96**

Prof: Viorica Lungana

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2x-2+5}{x-1} = 2 + \frac{5}{x-1} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{x-1} \in \mathbf{Z}$ $\Leftrightarrow x-1 \in \{-5,-1,1,5\} \Leftrightarrow x \in \{-4,0,2,6\}$	3p 2p											
2.	$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, n \geq 1$ $n=1 \Rightarrow a_1 = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}; \quad n=4 \Rightarrow a_4 = \frac{12-1}{6} = \frac{11}{6}$ $S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{11}{6}\right) = 2 \cdot \frac{13}{6} = \frac{13}{3}$	1p 2p 2p											
3.	$x^2 - 2(m-2)x + m > 0, (\forall)x \in R \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-2)^2 - 4m = 4(m^2 - 5m + 4)$ $m^2 - 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} m_1 = 1 \\ m_2 = 4 \end{matrix}$ <table border="1"><tr><td>m</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>4</td><td>∞</td></tr><tr><td>$m^2 - 5m + 4$</td><td>++++</td><td>0</td><td>-----</td><td>0</td><td>+++++</td></tr></table> $m^2 - 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (1,4)$	m	$-\infty$	1	4	∞	$m^2 - 5m + 4$	++++	0	-----	0	+++++	1p 2p 2p
m	$-\infty$	1	4	∞									
$m^2 - 5m + 4$	++++	0	-----	0	+++++								
4.	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, 0 \leq k \leq n$ $A_{12}^7 = \frac{12!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$	2p 3p											

5.	$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{3}$ <p>Din $AA' \perp BC \Rightarrow m_{AA'} = -\frac{1}{m_{BC}} = 3$</p> <p>Ecuția dreptei determinată de un punct și o direcție: $y - y_0 = m(x - x_0)$</p> <p>$AA' : y - 5 = 3(x - 2) \Leftrightarrow AA' : 3x - y - 1 = 0$</p>	2p
6.	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos a + \cos \left(\frac{2\pi}{3} - a \right) + \cos \left(\frac{2\pi}{3} + a \right) = \cos a +$ $= 2 \cos \frac{\frac{2\pi}{3} - a + \frac{2\pi}{3} + a}{2} \cos \frac{\frac{2\pi}{3} - a - \frac{2\pi}{3} + a}{2} =$ $= \cos a + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos(-a) = \cos a + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos a = \cos a - \cos a = 0$	1p 1p 3p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2$ <p>Deci $A \cdot B = B \cdot A = O_2$</p>	2p 2p 1p
b)	$(A+B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} \cdot B + C_n^2 A^{n-2} \cdot B^2 + \dots + C_n^{n-1} A \cdot B^{n-1} + C_n^n B^n =$ $= A^n + C_n^1 A^{n-2} \cdot AB + \dots + C_n^{n-1} AB \cdot B^{n-2} + B^n = A^n + B^n$ <p>Deoarece $A \cdot B = B \cdot A = O_2$, conform punctului a).</p>	3p 2p
c)	$A^{2012} + B^{2012} = (A+B)^{2012} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^{2012} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2012} =$ $= (2 \cdot I_2)^{2012} = 2^{2012} \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 2^{2012} & 0 \\ 0 & 2^{2012} \end{pmatrix}$	1p 2p

	$\det(A^{2012} + B^{2012}) = \begin{vmatrix} 2^{2012} & 0 \\ 0 & 2^{2012} \end{vmatrix} = 2^{2012} \cdot 2^{2012} = 2^{4024}$	2p
2.	$x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 > 1, (\forall) x, y \in (1, \infty)$	1p
a)	$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} = \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1} \in M, (\forall) x, y \in (1, \infty)$	2p
	$(x * y) * z = \sqrt{[(x * y)^2 - 1](z^2 - 1) + 1} = \sqrt{[(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1 - 1](z^2 - 1) + 1} =$ $= \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) + 1}, (\forall) x, y, z \in (1, \infty); (1)$	
	$x * (y * z) = \sqrt{(x^2 - 1)[(y * z)^2 - 1] + 1} = \sqrt{(x^2 - 1)[(y^2 - 1)(z^2 - 1) + 1 - 1] + 1} =$ $= \sqrt{(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1) + 1}, (\forall) x, y, z \in (1, \infty); (2)$	2p
	Din relațiile (1) și (2) rezultă că legea este asociativă pe M .	
b)	<p>Să arătăm că există $e \in M$ astfel încât $x * e = e * x = x, (\forall) x \in M$.</p> $x * e = x, (\forall) x \in M \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)(e^2 - 1) + 1} = x, (\forall) x \in M \Leftrightarrow$ $(x^2 - 1)(e^2 - 1) + 1 = x^2, (\forall) x \in M \Leftrightarrow (x^2 - 1)(e^2 - 2) = 0, (\forall) x \in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e = \sqrt{2} \in (1, \infty), (\forall) x \in M$ <p>Să arătăm că oricare ar fi $x \in M$ există $x' \in M$ astfel încât $x * x' = x' * x = \sqrt{2}$.</p> $x * x' = \sqrt{2}, (\forall) x \in M \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)(x'^2 - 1) + 1} = \sqrt{2}, (\forall) x \in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x'^2 - 1) + 1 = 2, (\forall) x \in M \Leftrightarrow x'^2 - 1 = \frac{1}{x^2 - 1}, (\forall) x \in M \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x'^2 = 1 + \frac{1}{x^2 - 1} > 1, (\forall) x \in (1, \infty) \Rightarrow x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \in (1, \infty), (\forall) x \in (1, \infty)$ <p>Deci orice element din M este inversabil în raport cu această lege.</p>	3p
c)	<p>Se arată prin inducție că $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori}} = \sqrt{(x^2 - 1)^n + 1}$</p> $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de } 2012 \text{ ori}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^{2012} + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow (x^2 - 1)^{2012} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in M$	2p
		2p
		1p

1.	<p>a) Dacă $x \in (-\infty, 0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x \cdot e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{1+x \cdot e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = 1$</p> <p>Dacă $x \in (0, \infty) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x \cdot e^{nx}}{1+e^{nx}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{nx} \left(\frac{1}{e^{nx}} + x \right)}{e^{nx} \left(\frac{1}{e^{nx}} + 1 \right)} = x$</p> <p>Pentru $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$</p> <p>$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x \cdot e^{nx}}{1+e^{nx}} = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
b)	$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)+1} = e^{x+1}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Funcția $h(x) = e^{x+1}$ este continuă și derivabilă pe domeniul de definiție $(0, \infty)$, atunci h este continuă pe $[1, 2]$ și derivabilă pe $(1, 2)$, deci se poate aplica teorema lui Lagrange: adică există $c \in (1, 2)$ astfel încât $h(2) - h(1) = (2-1)h'(c) \Rightarrow e^3 - e^2 = e^{c+1} \Leftrightarrow$</p> <p>$\Leftrightarrow e^{c+1} = e^2(e-1) \Rightarrow c+1 = \ln e^2(e-1) \Rightarrow c = \ln e^2(e-1) - 1$</p> <p>Din $2 < e < 3 \Rightarrow 1 < e-1 < 2 \Rightarrow e^2 < e^2(e-1) < 2e^2 \Rightarrow 2 < \ln e^2(e-1) < 2 + \ln 2 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow 1 < \ln e^2(e-1) - 1 < 1 + \ln 2 < 2$; deci $c \in (1, 2)$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
2.	<p>a) $\int_0^4 f^2(x) dx = \int_0^4 (16 - x^2) dx =$</p> <p>$= \left(16x - \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^4 =$</p> <p>$= 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

b)	$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx = 0$ <p>Deoarece funcția $g(-x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}} = -g(x), (\forall) x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, deci h este funcție impară.</p>	3p 2p												
c)	$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ <table border="1"><tr><td>x</td><td>-4</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td colspan="3">+++++ 0 -----</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>0 ↗</td><td>4</td><td>↘ 0</td></tr></table> <p>Observăm că $0 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \int_{-4}^4 f(x) dx \leq 4x \Big _{-4}^4 \Leftrightarrow$</p> <p>$\Leftrightarrow 0 \leq \int_{-4}^4 f(x) dx \leq 16 - (-16) = 32.$</p> <p>Deci $0 \leq \int_{-4}^4 f(x) dx \leq 32.$</p>	x	-4	0	4	$f'(x)$	+++++ 0 -----			$f(x)$	0 ↗	4	↘ 0	2p 1p 2p
x	-4	0	4											
$f'(x)$	+++++ 0 -----													
$f(x)$	0 ↗	4	↘ 0											