

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 97**

Prof: Viorica Lungana

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1	$\frac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 9}{2x + 1} = \frac{2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 6x + 3 + 6}{2x + 1} =$ $= \frac{x^2(2x + 1) - 2x(2x + 1) + 3(2x + 1) + 6}{2x + 1} = \frac{(2x + 1)(x^2 - 2x + 3) + 6}{2x + 1} =$ $= \left(x^2 - 2x + 3 + \frac{6}{2x + 1} \right) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{6}{2x + 1} \in \mathbb{Z}.$ $2x + 1 \mid 6 \Leftrightarrow 2x + 1 \in \{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$ $2x + 1 = -6 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}; 2x + 1 = -3 \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{Z}; 2x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z};$ $2x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -1 \in \mathbb{Z}; 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{Z}; 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z};$ $2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}; 2x + 1 = 6 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$ $A = \{-2, -1, 0, 1\}.$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2	$y = 5 + x - 1 \Leftrightarrow x - 1 = y - 5 > 0 \Rightarrow y - 5 = y - 5$ $2 x - 1 = 6 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3 \Rightarrow \begin{matrix} x = 4 \Rightarrow y = 8 \\ x = -2 \Rightarrow y = 8 \end{matrix}$ <p>Soluția $S = \{(4, 8); (-2, 8)\}.$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
3	$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, 0 \leq k \leq n; \text{ C.E. } n \geq 4; n \in \mathbb{N}$ $\frac{C_n^4}{C_n^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \cdot \frac{2!}{4!} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow$	<p>1p</p> <p>2p</p>

	$\frac{(n-2)(n-3) \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 42 \Leftrightarrow n^2 - 5n - 36 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} n_1 = 9 \\ n_2 = -4 \end{matrix} \Rightarrow n = 9 \in \mathbb{N}$	2p
4	<p>Fie $x_1, x_2 \in (1, \infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow$</p> $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)[(x_2^2 - 1) + (x_1x_2 - 1) + (x_1^2 - 1)] = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow f \text{ funcție injectivă.}$ <p>Din $f(1) = -2$, f continuă și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow f((1, \infty)) = (-2, \infty) \Rightarrow f$ surjectivă.</p> <p>f funcție injectivă și surjectivă, atunci f bijectivă.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
5	$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ $\vec{GA} = (3-3)\vec{i} + (2-4)\vec{j} = -2\vec{j}; \vec{GB} = (5-3)\vec{i} + (4-4)\vec{j} = 2\vec{i}$ $-2\vec{j} + 2\vec{i} + \vec{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{GC} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ $(x_C - 3)\vec{i} + (y_C - 4)\vec{j} = -2\vec{i} + 2\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 3 = -2 \\ y_C - 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 6 \end{cases} \Rightarrow C(1,6)$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
6	$E = 2[(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3] - 3[(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2] =$ $= 2[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)] -$ $- 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] =$ $= 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) = 2 - 6\sin^2 x \cos^2 x - 3 + 6\sin^2 x \cos^2 x =$ $= -1$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	$\det A_x = \begin{vmatrix} -x & -1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & -x \\ x & 1 & x & 1 \\ 1 & -x & -1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow[c2+c4]{c1+c3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -x \\ 2x & 2 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$	2p
	$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 2 & 1 & -x \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} =$	2p
	$= 4(x^2 + 1)$	1p

b)	$\det A_x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm i \in \mathbf{C}.$ Pentru $x \in \mathbf{C} - \{-i, i\}$ $rang A_x = 4$ $x = i \Rightarrow \det A_x = 0; \text{ există } \begin{vmatrix} -i & -1 & i \\ 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \end{vmatrix} = -i^3 - i + i - i^3 + i + i = 4i \neq 0$ $x = -i \Rightarrow \det A_x = 0; \text{ există } \begin{vmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & -i \end{vmatrix} = i^3 + i - i + i^3 - i - i = -4i \neq 0$ Deci $rang A_x = 3$ pentru $x = \pm i.$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
c)	$ z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}$ $ i = 0 + 1 \cdot i = 1; - i = 0 - 1 \cdot i = 1$ $S = i + -i = 1 + 1 = 2$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
2. a)	$M(a) = \begin{pmatrix} 2-a & a-1 \\ 2-2a & 2a-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-a & -1+a \\ 2-2a & -1+2a \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & a \\ -2a & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = A + aB$ cu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>
b)	Arătam că G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Fie $M(x), M(y) \in G,$ $M(x)M(y) = \begin{pmatrix} 2-x & x-1 \\ 2-2x & 2x-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-y & y-1 \\ 2-2y & 2y-1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 4-2x-2y+xy+2x-2-2xy+2y & 2y-xy-2+x+2xy-2y-x+1 \\ 4-4x-2y+2xy+4x-2-4xy+2y & 2y-2xy-2+2x+4xy-2y-2x+1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2-xy & xy-1 \\ 2-2xy & 2xy-1 \end{pmatrix} = M(xy) \in G.$ Verificăm axiomele grupului: G_1 Se știe că înmulțirea matricelor este asociativă. $G_2 M(x) \cdot M(y) = M(xy) = M(yx) = M(y) \cdot M(x), (\forall) M(x), M(y) \in G,$ deci înmulțirea	<p>1p</p> <p>1p</p>

	este comutativă.	1p
	G_3 $M(x) \cdot M(e) = M(x); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow M(xe) = M(x); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow xe = x, (\forall) x \in$ $\mathbf{R}^* \Leftrightarrow x(e-1) = 0, (\forall) x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow e = 1 \in \mathbf{R}^*, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \in G$ element neutru.	1p
	G_4 $M(x) \cdot M(x') = M(e); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow M(xx') = M(1); (\forall) M(x) \in G \Leftrightarrow xx' = 1, (\forall) x \in$ $\mathbf{R}^* \Rightarrow x' = \frac{1}{x} \in \mathbf{R}^*, (\forall) x \in \mathbf{R}^*,$ deci inversa oricărei matrice $M(x)$ este matricea $M\left(\frac{1}{x}\right)$. $(G, \cdot)$ grup abelian.	1p
c)	Fie funcția $f: \mathbf{R}^* \rightarrow G, f(x) = M(x)$. 1) Funcția este funcție bijectivă prin construcție. 2) $f(x \cdot y) = M(xy) = M(x) \cdot M(y) = f(x) \cdot f(y), (\forall) x, y \in \mathbf{R}^*,$ adică f este morfism de grupuri. Deci funcția f este izomorfism de grupuri.	2p 1p 2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \frac{-p}{-1} = p; l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \ln 1 = 0; f(0) = \ln 1 = 0$ Deci $l_s = l_d = f(0) \xRightarrow{p=0} f$ continuă în $x = 0$, adică, pentru $p = 0$, f este continuă pe $[-1, 1]$.	3p 2p
b)	$f'(x) = \begin{cases} \frac{(6x+r)(x-1)-3x^2-rx}{(x-1)^2}, & x < 0 \\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{3x^2-6x-r}{(x-1)^2}, & x < 0 \\ \frac{2qx-3}{qx^2-3x+1}, & x > 0 \end{cases}$ $f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = -r; f'_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = -3$ Dacă $f'_s(0) = f'_d(0) \Leftrightarrow r = 3 \Rightarrow f$ este derivabilă în $x = 0$.	2p 2p 1p
c)	Funcția f verifică teorema lui Rolle, adică: f este continuă pe intervalul $[-1, 1]$, f este derivabilă pe $(-1, 1)$ și $f(-1) = f(1)$.	1p

	$f(-1) = 0; f(1) = \ln(q-2)$ $\ln(q-2) = 0 \Leftrightarrow q = 3$ $S = p^2 + q^2 + r^2 = 0 + 3^2 + 3^2 = 18$	1p 1p 2p
2. a)	$I_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx = x \Big _{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 1$ $I_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx = 0, \text{ deoarece } \arcsin(-x) = -\arcsin x, (\forall) x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \text{ deci funcția } g(x) = \arcsin x \text{ este funcție impară.}$	2p 3p
b)	<p>Dacă n este impar, atunci funcția $g(x) = (\arcsin x)^n$ este funcție impară, deci</p> $I_{2n+1} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n+1} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) dx = 0.$ <p>Calculăm relația de recurență pentru n par</p> $I_{2n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n} dx = x(\arcsin x)^{2n} \Big _{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^{2n-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x^2}) (\arcsin x)^{2n-1} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n \sqrt{1-x^2} (\arcsin x)^{2n-1} \Big _{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - 2n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} (2n-1) (\arcsin x)^{2n-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$ $= \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + 2n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1) I_{2n-2} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + n\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1) I_{2n-2}$ <p>Deci $I_{2n} = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n} + n\sqrt{3} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n-1} - 2n(2n-1) I_{2n-2}$</p>	1p 1p 1p 2p
c)	$-\frac{\pi}{6} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{6} \Rightarrow \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \leq (\arcsin x)^n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n \text{ de unde, prin integrare obținem:}$	2p

$\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}} \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n \cdot x^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^n$	2p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{6}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0, (I_n)_{n \geq 1} \text{ este convergent.}$	

www.mateinfo.ro