

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 98**

Prof: Viorica Lungana

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

♦ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	<p>Fie $\alpha \in \mathbb{Z}$ o rădăcină a ecuației $x^2 - mx + 6 = 0$ atunci $\alpha^2 - m\alpha + 6 = 0 \Rightarrow$</p> $\Rightarrow m\alpha = \alpha^2 + 6 \Rightarrow m = \alpha + \frac{6}{\alpha} \in \mathbb{Z} \text{ dacă } \frac{6}{\alpha} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ <p> $\alpha = -6 \Rightarrow m = -6 - 1 = -7$ $\alpha = -3 \Rightarrow m = -3 - 2 = -5$ $\alpha = -2 \Rightarrow m = -2 - 3 = -5$ $\alpha = -1 \Rightarrow m = -1 - 6 = -7$ $\alpha = 1 \Rightarrow m = 1 + 6 = 7$ $\alpha = 2 \Rightarrow m = 2 + 3 = 5$ $\alpha = 3 \Rightarrow m = 3 + 2 = 5$ $\alpha = 6 \Rightarrow m = 6 + 1 = 7$ </p> <p>Deci, pentru $m \in \{-7, -5, 5, 7\}$ ecuația admite rădăcini întregi.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.	<p>Dacă $x + y + z = 1$ inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - 1$ devine:</p> $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + zx) - (x + y + z)^2 \Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4xy + 4yz + 4zx - x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$ <p>evident adevărată.</p> <p>Observăm că pentru $x = y = z$ relația devine egalitate.</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
3.	<p>Funcția $f(x) = 3^x + 4^x$ este strict crescătoare, ca sumă de funcții strict crescătoare.</p>	1p

	<p>Funcția $g(x) = 8 - x$ este funcție strict descrescătoare (este o funcție de gradul I cu coeficientul lui x este negativ).</p> <p>Deci ecuația dată admite soluție unică.</p> <p>Observăm că $x = 1$ este soluție: $3^1 + 4^1 = 8 - 1 \Leftrightarrow 7 = 7$</p>	2p
4.	<p>8+15=23 jucători. Observăm că antrenorul va face grupe (echipe) care nu depind de ordine, deci</p> $C_{23}^5 = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 19 \text{ moduri}$	2p 3p
5.	<p>Fie $M(\alpha, \beta) \Rightarrow \vec{OM} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$</p> $\vec{v} \cdot \vec{OM} = 3 \Leftrightarrow (3\vec{i} + 2\vec{j}) \cdot (\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}) = 3 \Leftrightarrow 3\alpha + 2\beta = 3$ <p>Coordonatele punctului $M(x, y)$ verifică ecuația dreptei $3x + 2y - 3 = 0$</p>	2p 3p
6.	$\begin{cases} \sin \alpha + \sin \beta = 1 \\ \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 1 \\ \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \text{prin adunare:}$ $1 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) + 1 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2 \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) = -\frac{3}{4}$	2p 1p 2p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & n \end{pmatrix}$ matricea sistemului.</p> <p>$\text{rang} A = 2$ dacă toți minorii de ordinul 3 sunt nuli.</p> <p>Deoarece $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, atunci rangul matricei poate fi 2 sau 3.</p> $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - m - 1 + 2m + 1 = m + 1$	2p 2p
----------	---	----------

	$\Delta_1 = 0 \Leftrightarrow m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 2n-1-1+1+2+n = 3n+1$ $\Delta_2 = 0 \Leftrightarrow 3n+1=0 \Leftrightarrow n=-\frac{1}{3}$ <p>Deci, pentru $m=-1$ și $n=-\frac{1}{3} \Rightarrow \text{rang}A = 2$.</p>	1p
b)	<p>Considerăm $\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, ecuații principale: ecuațiile 1 și a 2-a, ecuații secundare: ecuația a 3-a.</p> <p>Sistemul este compatibil dacă $\Delta_{car} = 0$.</p> $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2p-1+1-1-2+p=0 \Leftrightarrow 3p-3=0 \Leftrightarrow p=1.$ <p>Deci pentru $p=1$ sistemul este compatibil nedeterminat.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Necunoscute principale: x și y, necunoscute secundare z și t.</p> <p>Fie $z = \alpha \in \mathbf{R}$ și $t = \beta \in \mathbf{R}$; rezolvăm sistemul:</p> $\begin{cases} 2x - y = 1 - \alpha + \beta \\ x + y = -1 + \alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y = -x - 1 + \alpha - \beta \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha - \beta - 1 \end{cases}$ <p>Soluția sistemului $S = \{(0, \alpha - \beta - 1, \alpha, \beta) \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2p</p>
2.	$x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow$	1p
a)	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon \\ x = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon^2 \end{cases} \end{cases}$ <p>Deci $\varepsilon^3 = 1$, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$</p>	<p>3p</p> <p>1p</p>

b)	$g = X^3 + (a + p)X^2 + (b + p)X + c + p = X^3 + aX^2 + pX^2 + bX + pX + c + p \Rightarrow$ $g = f + p(X^2 + X + 1) \Leftrightarrow g - f = p(X^2 + X + 1)$ <p>Pentru $\varepsilon \Rightarrow g(\varepsilon) - f(\varepsilon) = p(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0 \Rightarrow \varepsilon$ rădăcină comună.</p> <p>Pentru $\varepsilon^2 \Rightarrow g(\varepsilon^2) - f(\varepsilon^2) = p(\varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1) = 0 \Rightarrow \varepsilon^2$ rădăcină comună.</p> <p>Deci, rădăcinile comune celor două polinoame sunt: ε și ε^2.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Fie ε rădăcina comună a celor două polinoame.</p> $g(\varepsilon) = \varepsilon^3 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c + p(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow 1 + a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c + p \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c + 1 = 0 \text{ și } p \in \mathbf{R}.$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. a)	<p>Funcția f este continuă în $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = f(0).$</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{3x^2 + nx - p}{x - 1} = p; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(rx^2 - 3x + 1) = \ln 1 = 0;$ $f(0) = \ln 1 = 0.$ <p>Deci f este continuă în $x = 0$ dacă $p = 0$.</p> <p>f derivabilă în $x = 0$ dacă f este continuă și $f'_s(0) = f'_d(0).$</p> $p = 0 \Rightarrow \left(\frac{3x^2 + nx}{x - 1} \right)' = \frac{(6x + n)(x - 1) - 3x^2 - nx}{(x - 1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - n}{(x - 1)^2}$ $f'(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 6x - n}{(x - 1)^2}, & x < 0 \\ \frac{2rx - 3}{rx^2 - 3x + 1}, & x > 0 \end{cases}$ $f'_s(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{3x^2 - 6x - n}{(x - 1)^2} = -n$	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
----------	--	-------------------------------

	$f'_d(0)=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\x>0}}f'(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 0\\x>0}}\frac{2rx-3}{rx^2-3x+1}=-3$ <p>Deci f este derivabilă în $x=0$ dacă $n=3$.</p>													
b)	<p>Condițiile teoremei lui Rolle sunt: f este continuă pe $[-1,1]$; f este derivabilă pe $(-1,1)$; $f(-1)=f(1)$, atunci există $c\in(-1,1)$ astfel încât $f'(c)=0$.</p> <p>Pentru $p=0$, f este continuă pe $[-1,1]$ și pentru $p=0$ și $n=3$ f este derivabilă în $x=0$.</p> <p>$f(-1)=0$; $f(1)=\ln(r-2)$.</p> <p>$f(-1)=f(1)\Leftrightarrow \ln(r-2)=0\Leftrightarrow r-2=1\Rightarrow r=3\in\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.</p> <p>$3x^2-3x+1>0$, deci are sens logaritmul.</p>	1p 1p 1p 2p												
c)	<p>Observăm că $f'(0)=-3\Rightarrow m=-3$</p> <p>$y-y_0=f'(0)(x-x_0)$</p> <p>Dar $x_0=0$; $y_0=0\Rightarrow$</p> <p>Ecuția tangentei este $y=-3x$</p>	1p 1p 1p 2p												
2.	<p>Pentru a explicita funcția $f(x)$, studiem monotonia funcției $g(t)=t^2-2t$</p> <p>a)</p> <table border="1"><tr><td>t</td><td>$-\infty$</td><td>$t\leq x$</td><td>1</td><td>$t\leq x$</td><td>∞</td></tr><tr><td>$g(t)=t^2-2t$</td><td></td><td></td><td>-1</td><td></td><td></td></tr></table> <p>Pentru $x\in(-\infty,1)\Rightarrow g(t)$ este strict descrescătoare, adică $t\leq x\Rightarrow g(x)\leq g(t)$, atunci $\inf g(t)=g(x)=x^2-2x$.</p> <p>Pentru $x\in[1,\infty)\Rightarrow g(t)$ este strict crescătoare, adică $1\leq t\leq x\Rightarrow g(1)\leq g(t)\leq g(x)$ atunci $\inf g(t)=g(1)=-1$.</p> <p>Deoarece $h(t)=8-3t$ este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$, atunci $t\leq x\Rightarrow g(x)\leq g(t)$, deci $\inf g(t)=g(x)=8-3x$.</p>	t	$-\infty$	$t\leq x$	1	$t\leq x$	∞	$g(t)=t^2-2t$			-1			2p 2p 1p
t	$-\infty$	$t\leq x$	1	$t\leq x$	∞									
$g(t)=t^2-2t$			-1											

	<p>Aşadar $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \in (-\infty, 1) \\ -1, & x \in [1, 3] \\ 8 - 3x, & x \in (3, \infty) \end{cases}$.</p>	
b)	$\int_0^4 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 2x) dx + \int_1^3 (-1) dx + \int_3^4 (8 - 3x) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big _0^1 - x \Big _1^3 + \left(8x - \frac{3}{2} x^2 \right) \Big _3^4 =$ $= \frac{1}{3} - 1 - 3 + 1 + 32 - 24 - 24 + \frac{27}{2} = -19 + \frac{83}{2} = -\frac{31}{2}$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	<p>Observăm că funcția f este continuă pe intervalul $[0, 4]$ și $f(x) \leq 0, (\forall) x \in [0, 4]$, atunci</p> $\text{aria}(\Gamma_f) = -\int_0^4 f(x) dx = \frac{31}{6}.$ $\text{vol}(C_f) = \pi \int_0^4 f^2(x) dx = \pi \left[\int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx + \int_1^3 (-1)^2 dx + \int_3^4 (8 - 3x)^2 dx \right] =$ $= \pi \left[\int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx + x \Big _1^3 + \int_3^4 (64 - 48x + 9x^2) dx \right] =$ $= \pi \left[\left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big _0^1 + 3 - 1 + (64x - 24x^2 + 3x^3) \Big _3^4 \right] =$ $= \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} + 2 + 64(4 - 3) - 24(16 - 9) + 3(64 - 27) \right) =$ $= \pi \left(\frac{23}{15} + 1 + 64 - 168 + 111 \right) = \pi \left(\frac{23}{15} + 8 \right) = \frac{143}{15} \pi$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>