

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**Varianta 99**

Prof: Viorica Lungana

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	<p>Relațiile lui Viète pentru ecuația $x^2 - 2(a-1)x - 2a + 1 = 0$ sunt: $x_1 + x_2 = 2(a-1)$, $x_1 x_2 = 1 - 2a$</p> $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2} \geq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^2} \geq \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^2} - \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \geq 0$ $\Rightarrow \frac{8(a-1)^3 - 6(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2} - \frac{2(a-1)}{1-2a} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4(a-1)^3 - 3(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2} - \frac{a-1}{1-2a} \geq 0$ $\Rightarrow \frac{4(a-1)^3 - 4(a-1)(1-2a)}{(1-2a)^2} \geq 0 \Rightarrow (a-1)^3 - (a-1)(1-2a) \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (a-1)(a^2 - 2a + 1 - 1 + 2a) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-1) \geq 0 \Rightarrow \begin{matrix} a-1 \geq 0 \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a \geq 1 \\ a=0 \end{matrix} \Rightarrow$ $\Rightarrow a \in [1, \infty) \cup \{0\}.$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.	<p>$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 = g^2(x) + 2g(x) + 1 + 1 = (g(x) + 1)^2 + 1 =$</p> <p>$= (x^2 + 2x + 1)^2 + 1 = x^4 + 4x^2 + 1 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2$</p> <p>$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^2(x) + 2f(x) = (x^2 + 2x + 2)^2 + 2(x^2 + 2x + 2) =$</p> <p>$= x^4 + 4x^2 + 4 + 4x^3 + 4x^2 + 8x + 2x^2 + 4x + 4 = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 8$</p> <p>$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2 = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow$</p> <p>$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 3 = 0$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

	$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8 < 0 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții reale.	
3.	<p>Fie $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ și $B = \{2, 3, \dots, 10\}$</p> <p>Mulțimea A are 2^{10} submulțimi, iar mulțimea B are 2^9 submulțimi.</p> <p>Numărul submulțimilor care îl conțin pe 1 este $2^{10} - 2^9 = 2^9(2 - 1) = 2^9 = 512$</p>	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>2ps</p>
4.	$\log_7(4 \cdot 2^x - 2^{x-1}) = 1 + \log_7 4 \Leftrightarrow \log_7(4 \cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 7 + \log_7 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \log_7(4 \cdot 2^x - 2^{x-1}) = \log_7 28 \Rightarrow 4 \cdot 2^x - 2^{x-1} = 28 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 8 \cdot 2^x - 2^x = 56 \Leftrightarrow 7 \cdot 2^x = 56 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$	<p>2p</p> <p>3p</p>
5.	$E(x) = \sin^2 x + 2 \cos x \cos a \cos(a+x) - \cos^2(a+x) =$ $= \sin^2 x + \cos(a+x)[2 \cos x \cos a - \cos a \cos x + \sin a \sin x] =$ $= \sin^2 x + (\cos a \cos x - \sin a \sin x)(\cos x \cos a + \sin a \sin x) =$ $= \sin^2 x + \cos^2 x \cos^2 a - \sin^2 x \sin^2 a = \sin^2 x + (1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 a) - \sin^2 x \sin^2 a =$ $= \sin^2 x + 1 - \sin^2 x - \sin^2 a + \sin^2 x \sin^2 a - \sin^2 x \sin^2 a = 1 - \sin^2 a = \cos^2 a$	<p>2p</p> <p>3p</p>
6.	<p>Imaginea punctului $P(2, 3)$ prin simetrie de centru $P_0(x_0, y_0)$ este punctul $P'(4, -5)$, adică punctul P_0 este mijlocul segmentului PP', rezultă:</p> $x_0 = \frac{x_P + x_{P'}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3; y_0 = \frac{y_P + y_{P'}}{2} = \frac{3 - 5}{2} = -1 \Rightarrow P_0(3, -1).$	<p>3p</p> <p>2p</p>

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	Matricea A este inversabilă dacă $\det A \neq 0$.	
a)	$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3a + 2a + 1 + 2 - a^2 - 3 = -a^2 - a$ $-a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ a = -1 \end{matrix}$ <p>Deci pentru $a \in \mathbf{R} - \{-1, 0\} \Rightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ există A^{-1}.</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

b)	<p>Pentru $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\det A = -1 - 1 = -2 \neq 0$</p> <p>$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 9 & 4 & 12 \end{pmatrix}$</p> <p>$B = \frac{1}{\det A} (A^2 - 3A - 5I_3) = -\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 9 & 4 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \right] =$</p> <p>$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$</p>	1p
		2p
		2p
c)	<p>Folosim formula Hamilton – Cayley pentru matricea de ordinul 3:</p> <p>$A^3 - \text{Tr}A \cdot A^2 + \text{Tr}A^* \cdot A - \det A \cdot I_3 = 0$</p> <p>$\text{Tr}A = 1 - 1 + 3 = 3$</p> <p>$\text{Tr}A^* = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33} = -4 + 1 - 2 = -5$</p> <p>$A^3 - 3A^2 - 5A + 2I_3 = 0 \Leftrightarrow A(A^2 - 3A - 5I_3) = -2I_3 \Leftrightarrow A \cdot \left[-\frac{1}{2}(A^2 - 3A - 5I_3) \right] = I_3$</p> <p>$\Rightarrow A^{-1} = B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ calculată la punctul b).</p>	1p
		2p
		2p
		1p
2.	<p>$x * y = 1 + (x-1)^{\ln(y-1)} = 1 + e^{\ln(x-1) \ln(y-1)} = 1 + e^{\ln(y-1) \ln(x-1)}, (\forall) x, y \in G, (1)$</p>	2p
a)	<p>$y * x = 1 + (y-1)^{\ln(x-1)} = 1 + e^{\ln(y-1) \ln(x-1)} = 1 + e^{\ln(x-1) \ln(y-1)}, (\forall) x, y \in G, (2)$</p> <p>Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este comutativă.</p>	2p
		1p
b)	<p>$(x * y) * z = 1 + (x * y - 1)^{\ln(z-1)} = 1 + [1 + (x-1)^{\ln(y-1)} - 1]^{\ln(z-1)} = 1 + (x-1)^{\ln(y-1) \ln(z-1)},$ $(\forall) x, y, z \in G, (1)$</p> <p>$x * (y * z) = 1 + (x-1)^{\ln(y * z - 1)} = 1 + (x-1)^{\ln[1 + (y-1)^{\ln(z-1)} - 1]} = 1 + (x-1)^{\ln(y-1) \ln(z-1)} =$ $= 1 + (x-1)^{\ln[z-1] \ln(y-1)}, (\forall) x, y, z \in G, (2)$</p>	2p
		2p
		1p

	Din relațiile (1) și (2), rezultă că legea este asociativă.	
c)	<p>Dacă $x = y = z$, atunci din asociativitatea legii obținem $x * x * x = 1 + (x - 1)^{\ln^2(x-1)}$.</p> <p>$x * x * x = e^{27} + 1 \Leftrightarrow 1 + (x - 1)^{\ln^2(x-1)} = e^{27} + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^{\ln^2(x-1)} = e^{27} \Leftrightarrow$</p> <p>$\Leftrightarrow \ln(x - 1)^{\ln^2(x-1)} = \ln e^{27} \Leftrightarrow [\ln(x - 1)]^3 = 27 \Leftrightarrow \ln(x - 1) = 3 \Rightarrow x - 1 = e^3 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow x = 1 + e^3$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	Studiem monotonia șirului.	
a)	<p>$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1}}{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = x_{n+1} = \frac{8n+5}{8n+9} < 1 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow a_{n+1} < a_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
b)	<p>Folosim metoda inducției matematice.</p> <p>Fie $P(n): a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall) n \geq 1$</p> <p>$P(1): a_1 = x_1 = \frac{8-3}{8+1} = \frac{5}{9} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}} \Rightarrow 5\sqrt{13} < 9\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{5 \cdot 13} < 9 \Rightarrow 65 < 81$ adevărat,</p> <p>rezultă $P(1): a_1 < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$ adevărată.</p> <p>Presupunem relația adevărată pentru $n = k$ și demonstrăm că este adevărată pentru $n = k + 1, (\forall) k \geq 1$</p> <p>$P(k): a_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}}$</p> <p>$P(k+1): a_{k+1} = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k \cdot x_{k+1} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_k) \cdot x_{k+1} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}} \cdot x_{k+1} =$</p> <p>$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+5}} \cdot \frac{8k+5}{8k+9} = \frac{\sqrt{5(8k+5)}}{8k+9} < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8k+13}} \Rightarrow \sqrt{8k+5} \cdot \sqrt{8k+13} < 8k+9 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow 64k^2 + 104k + 40k + 65 < 64k^2 + 144k + 81 \Leftrightarrow 65 < 81$ adevărat, rezultă $P(k+1)$ adevărată, $(\forall) k \geq 1$.</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

	Deci $P(n): a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \geq 1.$	1p
c)	<p>Observăm că $a_n > 0, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$</p> <p>Deci $0 < a_n < \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}}, (\forall)n \geq 1 \Rightarrow$ șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător, rezultă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.</p> <p>Folosim criteriul majorării și obținem: $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8n+5}} = 0 \Rightarrow$</p> <p>$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$</p>	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
2.	$x^3 + 3x^2 + 8x + 6 = x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 6x + 6 =$	2p
a)	$= x^2(x+1) + 2x(x+1) + 6(x+1) =$ $= (x+1)(x^2 + 2x + 6)$	<p>2p</p> <p>1p</p>
b)	$I_1 = \int f_1(x) dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{x^2 + 2x + 4} dx$ $H_1 = \frac{1}{2} \int \frac{t+2}{t} dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{t}\right) dt = \frac{t}{2} + \ln t + C \Rightarrow$ $\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 4) + \ln(x^2 + 2x + 4) + C$ $I_2 = \int f_2(x) dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 2x + 4)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{(x^2 + 2x + 4)^2} dx$ $H_2 = \frac{1}{2} \int \frac{t+2}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{t} + C \Rightarrow$ $\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{1}{x^2 + 2x + 4} + C$	<p>1p</p> <p>1p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
c)	$I_n = \int f_n(x) dx = \int \frac{x^3 + 3x^2 + 8x + 6}{(x^2 + 2x + 4)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)(x^2 + 2x + 6)}{(x^2 + 2x + 4)^n} dx$ <p>Facem substituția</p> $t = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow dt = (2x+2)dx$ $H_n = \frac{1}{2} \int \frac{t+2}{t^n} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^{n-1}} dt + \int \frac{1}{t^n} dt = \frac{1}{2} \int t^{-n+1} dt + \int t^{-n} dt =$	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>

	$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-n+2}}{-n+2} + \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{2(n-2)} \cdot \frac{1}{t^{n-2}} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C \Rightarrow$ $I_n = -\frac{1}{2(n-2)} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)^{n-2}} - \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)^{n-1}} + C, (\forall) n \geq 3$	
--	---	--

www.mateinfo.ro